1.– Resuelve las siguientes ecuaciones reales:

$$2x - 1 + \sqrt{x} = 0 \quad ; \quad 2^{3-x} = 32 \quad ; \quad \ln(2x-1) + 4 = \ln 3$$

<u>*Solución*</u>

► **Ecuaciones con raíces:** No todas las ecuaciones de este tipo son sencillas de resolver, pero podemos intentar dejar a un lado de la igualdad la raíz y elevar los dos miembros de la igualdad al índice de la raíz. Resolvemos la ecuación, que en principio será polinómica después de reiterar este proceso las veces necesarias, pero debemos comprobar si las soluciones que se obtienen para esta nueva ecuación son también soluciones de la ecuación original.

Una técnica que puede funcionar para resolver cierto tipo de ecuaciones con raíces es la siguiente:

1. dejar a una lado de la igualdad la expresión que contenga una raíz.
2. elevar ambos miembros de la igualdad al índice de la raíz,
3. repetir el proceso si fuera necesario hasta llegar a una ecuación polinómica,
4. resolver la ecuación polinómica resultante y **comprobar** si las soluciones de esta ecuación son también soluciones de la ecuación original.

$$2x - 1 + \sqrt{x} = 0$$

$$\sqrt{x} = 1 - 2x$$

$$x = (1-2x)^2 = 4x^2 - 4x + 1$$

$$4x^2 - 5x + 1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x = 1 \\ x = 1/4 \end{cases}$$

¿Cuál es la solución de la ecuación original? Como $x = 1$ no satisface la ecuación original pues $2-1+1 = 2 \neq 0$, $x = 1$ no es solución de la ecuación original. Sin embargo $x = 1/4$ si satisface la ecuación original. por lo tanto la solución es: $\underline{x = 1/4}$.

► **Ecuaciones exponenciales:** Tampoco este tipo de ecuaciones es sencillo de resolver. Si la ecuación es simple, podemosutilizar las propiedades de las exponenciales y además el siguiente resultado:

$$\text{Si } a > 0, \text{ entonces: } a^x = a^y \quad \Longleftrightarrow \quad x = y$$

Para resolver estas ecuaciones se suelen utilizar dos métodos alternativos:

- Igualar la base: consiste en aplicar las propiedades de las potencias para lograr que en los dos miembros de la ecuación aparezca una misma base elevada a distintos exponentes

$$2^{3-x} = 32$$

$$2^{3-x} = 32 = 2^5$$

$$3 - x = 5$$

$$\underline{x = -2}$$

- Cambio de variable: consiste en sustituir todas las potencias que figuran en la ecuación por potencias de una nueva variable, convirtiendo la ecuación original en otra más fácil de resolver.

$$2^{2x} - 3 \cdot 2^x - 4 = 0 \quad \overset{t^{2x}}{\overset{\downarrow}{\Longleftrightarrow}} \quad t^2 - 3t - 4 = 0$$

▶ **Ecuaciones logarítmicas:** Al igual que en el caso anterior no vamos a ser capaces de resolver todas las ecuaciones de este tipo. Para resolver las ecuaciones más sencillas, utilizar las propiedades de los logaritmos y además la denominada propiedad de unicidad que asegura que dos números distintos no pueden tener el mismo logaritmo, o dicho de otro modo, si dos números tienen el mismo logaritmo ha de ser necesariamente iguales:

$$\text{Si } x, y > 0, \text{ entonces: } \ln x = \ln y \quad \Longleftrightarrow \quad x = y$$

Habitualmente se procura convertir la ecuación logarítmica en otra equivalente donde no aparezca ningún logaritmo. Para ello, se procede del modo siguiente:

1. Agrupar para obtener un único logaritmo a cada lado de la igualdad (para ello es posible que haya que utilizar algunas de las propiedades de los logaritmos ya enunciadas),
2. Eliminar los logaritmos utilizando la propiedad de unicidad arriba enunciada.

$$\ln(2x-1)+4=\ln 3$$

$$\ln(2x-1)+\ln e^4=\ln 3$$

$$\ln(2x-1)=\ln 3-\ln e^4=\ln\frac{3}{e^4}$$

$$2x-1=\frac{3}{e^4}$$

$$\underline{x=\frac{3}{2e^4}+\frac{1}{2}}$$

Inecuaciones: Para resolver inecuaciones hay que tener muy presente las siguientes propiedades de los números reales:

- Al sumar a ambos miembros de una desigualdad un mismo número real, la desigualdad mantiene el sentido:
$$a \le b \quad \Longrightarrow \quad a+c \le b+c$$
- Al restar a ambos miembros de una desigualdad un mismo número real, la desigualdad mantiene el sentido:
$$a \le b \quad \Longrightarrow \quad a-c \le b-c$$
- Al multiplicar por un número positivo a ambos miembros de una desigualdad la desigualdad mantiene el sentido:
$$a \le b \quad \overset{c\ge 0}{\Longrightarrow} \quad a\cdot c \le b\cdot c$$
- Al multiplicar por un número negativo a ambos miembros de una desigualdad la desigualdad cambia el sentido:
$$a \le b \quad \overset{c\le 0}{\Longrightarrow} \quad a\cdot c \ge b\cdot c$$
- $0 < a \le b \quad \Longrightarrow \quad 0 < \dfrac{1}{b} \le \dfrac{1}{a}$

2.– Resuelve las siguientes inecuaciones:

$$-2x+3 \le 1 \qquad ; \qquad -x^2+3x-4 \le 0$$

$$\frac{(x-3)^7(x-2)^6(x^3+1)}{2x^3-3x^2+1} \le 0 \qquad ; \qquad \left|x^2-2x-3\right| \ge x+2$$

Solución

Para resolver inecuaciones de tipo racional puede ser de gran utilidad realizar un cuadro de variación de los signos de cada factor que aparece en la expresión racional.

Vamos a explicarlo con un ejemplo. Se trata de resolver $\dfrac{(x-3)^7(x-2)^6(x^3+1)}{2x^3-3x^2+1} \leq 0$. Lo primero que tenemos que hacer es descomponer en factores irreducibles en $\mathbb{R}$ los polinomios del numerador y del denominador, para ello conviene utilizar la regla de Ruffini. Además debemos saber que si un polinomio de coeficientes reales tiene raíces enteras, éstas han de ser divisores del término independiente del polinomio.

Comencemos con el numerador. Tenemos que:

$$\begin{array}{l} \text{signo}\,(x-3)^7 = \text{signo}\,(x-3) \\ (x-2)^6 \geq 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \end{array}$$

y tenemos que hallar la descomposición en $\mathbb{R}$ en factores irreducibles de x^3+1[1]. Sabemos que las posibles raíces enteras son: 1 o -1. Comprobamos que -1 es raíz de x^3+1 y utilizando la regla de Ruffini obtenemos que:

$$x^3+1 = (x+1)\cdot(x^2-x+1)$$

Para hallar las raíces del polinomio x^2-x+1 resolvemos la ecuación de segundo grado $x^2-x+1=0$ y vemos que no tiene raíces reales. Esto quiere decir que la parábola x^2-x+1 está o por encima o por debajo del eje horizontal, es decir, no corta al eje. Dando un valor a x (por ejemplo $x=0$) vemos que

$$x^2-x+1 > 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

Pasemos al denominador. Razonando como en el caso anterior tenemos que:

$$2x^3-3x^2+1 = 2(x-1)^2\left(x+\frac{1}{2}\right)$$

Por lo tanto:

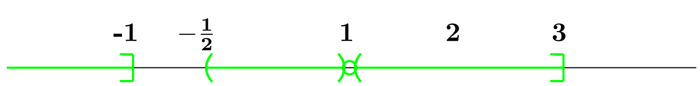
$$\frac{(x-3)^7(x-2)^6(x^3+1)}{2x^3-3x^2+1} = \frac{(x-3)^7(x-2)^6(x+1)(x^2-x+1)}{2(x-1)^2\left(x+\frac{1}{2}\right)} \leq 0$$

Como $(x-1)^2=0$ tenemos que tener en cuenta que $x \neq 1$.

Construimos un cuadro de variación de los signos de cada factor como en el ejemplo 3.–:

-1 $\quad -\frac{1}{2} \quad$ **1** $\quad$ **2** $\quad$ **3**

Signo						
$\mathbf{x+1}$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$\mathbf{x+\frac{1}{2}}$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$
$\mathbf{x-1}$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$
$\mathbf{x-2}$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$
$\mathbf{x-3}$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$
$\mathbf{\dfrac{(x-3)^7(x-2)^6(x+1)(x^2-x+1)}{2(x-1)^2\left(x+\frac{1}{2}\right)}}$	$-$	$+$	$-$	$-$	$+$	$-$



[1]El Teorema Fundamental del Álgebra asegura que un polinomio de grado n con coeficientes reales admite n raíces entre reales y complejas. Además las raíces complejas siempre son un número par, pues si un número complejo es raíz de un polinomio con coeficientes reales, también lo es su conjugado. Como conclusión tenemos que un polinomio con coeficientes reales de grado impar siempre tiene al menos una raíz real.

La solución es:

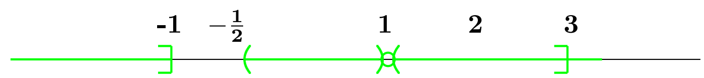
$$(-\infty,-1]\cup\left(-\frac{1}{2},1\right)\cup(1,3]$$

Si tenemos en cuenta que algunos de los factores son siempre no negativos, podemos construir una tabla más simple y en consecuencia nos resultará más sencillo resolver el problema:

$$\frac{(x-3)^7(x-2)^6(x^3+1)}{2x^3-3x^2+1}\leq 0 \quad\Longleftrightarrow\quad \frac{(x-3)(x+1)}{x+\frac{1}{2}}\leq 0\ \wedge\ x\neq 1$$

Como $(x-1)^2=0\Longleftrightarrow x=1$ tenemos que tener en cuenta que $x\neq 1$.

Signo	**-1**	$-\frac{1}{2}$	**1**	**2**	**3**
$\mathbf{x+1}$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$
$\mathbf{x+\frac{1}{2}}$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$
$\mathbf{x-3}$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
$\mathbf{\frac{(x-3)(x+1)}{(x+\frac{1}{2})}}$	$-$	$+$	$-$	$-$	$+$



3.– Realiza las siguientes operaciones:

a.– $(2+3x)^2$

b.– $\left(x^2-3x^4\right)^3$

c.– $\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\right)^5$

d.– $\left(x^3+x^2-2x+1\right)^2$

División de polinomios: Para dividir polinomios es recomendable utilizar una disposición de los polinomios similar a la utilizada para la división de números reales. Vamos a realizar el siguiente ejemplo:

Se trata de dividir el polinomio $p(x)=6x^3-17x^2+15x-8$ entre $q(x)=x^2+4$:

$$\begin{array}{rrrrrrr|rrr}
6x^3 & - & 17x^2 & + & 15x & - & 8 & x^2 & + & 4 \\ \cline{8-10}
-6x^3 & & & - & 12x & & & 3x & - & 17 \\ \cline{1-7}
 & - & 17x^2 & + & 3x & - & 8 & & & \\
 & & 17x^2 & & & + & 68 & & & \\ \cline{3-7}
 & & & & 3x & + & 60 & & &
\end{array}$$

Regla de Ruffini: La conocida como regla de Ruffini es un procedimiento esquemático para hallar el cociente y el resto de la división de un polinomio cualquiera por otro de la forma $x+a$. La regla de Ruffini permite hallar el cociente y el resto de la división de un polinomio, por ejemplo $p(x)=2x^4-3x^3+5x^2-6x+10$, por un polinomio de primer grado del tipo $x+a$, por ejemplo $x-2$, sin necesidad de efectuar la división.

Para ello se disponen del modo siguiente los coeficientes del polinomio $p(x)$:

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 2 & -3 & 5 & -6 & 10 \\
2 & & & & & \\ \hline
 & & & & &
\end{array}$$

Se escribe el primer coeficiente debajo de la línea horizontal. Luego, este coeficiente se multiplica por 2 (que es el término independiente del binomio divisor cambiado de signo) y el resultado se suma al segundo coeficiente:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 2 & -3 & 5 & -6 & 10 \\ 2 & & 4 & & & \\ \hline & 2 & 1 & & & \end{array}$$

Con el valor obtenido se reitera el proceso hasta llegar al final:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 2 & -3 & 5 & -6 & 10 \\ 2 & & 4 & 2 & 14 & 16 \\ \hline & 2 & 1 & 7 & 8 & 26 \end{array}$$

El último valor obtenido en la última fila es el resto de la división; los otros números son los coeficientes del polinomio cociente. Para escribir el polinomio cociente basta recordar que su grado es una unidad inferior al del dividendo. Luego el resultado de dividir el polinomio

$$p(x) = 2x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 6x + 10$$

por $x - 2$ es:

$$q(x) = 2x^3 + x^2 + 7x + 14$$

y el resto es $r = 26$. Es decir:

$$p(x) = 2x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 6x + 10 = q(x) \cdot (x - 2) + r = \left(2x^3 + x^2 + 7x + 14\right) \cdot (x - 2) + 26$$

A la izquierda mostramos la división de polinomios de la manera clásica y a la derecha el método de Ruffini para el ejemplo anterior lo que nos permite observar como aparecen en el método de Ruffini los coeficientes del cociente y el valor del resto.

$$\begin{array}{rrrrr|l} 2x^4 & -3x^3 & +5x^2 & -6x & +10 & x-2 \\ \cline{6-6} -2x^4 & +4x^3 & & & & 2x^3+1x^2+7x+8 \\ \cline{1-3} & x^3 & +5x^2 & & & \\ & -x^3 & +2x^2 & & & \\ \cline{2-4} & & 7x^2 & -6x & & \\ & & -7x^2 & +14x & & \\ \cline{3-5} & & & 8x & +10 & \\ & & & -8x & +16 & \\ \cline{4-5} & & & & \boxed{26} & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 2 & -3 & 5 & -6 & 10 \\ 2 & & & & & \\ \hline & 2 & & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 2 & -3 & 5 & -6 & 10 \\ 2 & & 4 & & & \\ \hline & 2 & 1 & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 2 & -3 & 5 & -6 & 10 \\ 2 & & 4 & 2 & & \\ \hline & 2 & 1 & 7 & & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 2 & -3 & 5 & -6 & 10 \\ 2 & & 4 & 2 & 14 & \\ \hline & 2 & 1 & 7 & 8 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 2 & -3 & 5 & -6 & 10 \\ 2 & & 4 & 2 & 14 & 16 \\ \hline & 2 & 1 & 7 & 8 & \boxed{26} \end{array}$$

Cociente: $C(x) = 2x^3 + x^2 + 7x + 8$
Resto: $R(x) = 26$

4.– Dados los polinomios:

$$p(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^2 - 1 \qquad \text{y} \qquad q(x) = x + 2,$$

hallar dos polinomios $c(x)$ y $r(x)$ que cumplan:

$$p(x) = \left[(x+2)^2\right] \cdot c(x) + r(x)$$

5.– Indicar si $q(x)$ es un divisor de $p(x)$. Justificar las respuestas y escribir en todos los casos el polinomio cociente y el resto.

a.– $p(x) = x^5 + 32 \qquad q(x) = x + 2.$

b.– $p(x) = x^4 + 81 \qquad q(x) = x + 3.$

c.– $p(x) = x^5 - 243 \qquad q(x) = x - 3.$

d.– $p(x) = x^4 - 81 \qquad q(x) = x - 3.$

e.– $p(x) = x^3 - 8 \qquad q(x) = x + 2.$

f.– $p(x) = x^3 + 8 \qquad q(x) = x - 2.$

g.– $p(x) = x^2 - 25 \qquad q(x) = x + 5.$

h.– $p(x) = x^4 + 16 \qquad q(x) = x - 2.$

Desigualdades con valor absoluto: Para resolver desigualdades con valor absoluto además de lo expuesto anteriormente sobre la resolución de desigualdades de tipo racional, debemos de tener en cuenta la definicón y las propiedades del valor absoluto.

► Se define el *valor absoluto* de un número real x, que denotaremos $|x|$, del modo siguiente:

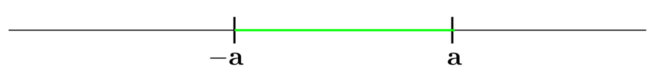
$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Es claro a partir de la definición que se cumplen las siguientes propiedades:

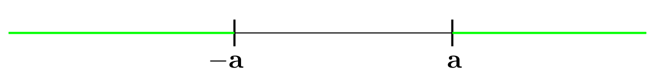
- $|x| = 0 \iff x = 0$
- $|x| \geq 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$
- $|x| = |-x| \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$

Otras propiedades también importantes son:

- Si $a \geq 0$, entonces $|x| \leq a \iff -a \leq x \leq a$



- Si $a \geq 0$, entonces $|x| \geq a \iff x \leq -a$ o $x \geq a$



- $-|x| \leq x \leq |x| \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$
- $|x \cdot y| = |x| \cdot |y| \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}$
- $|x + y| \leq |x| + |y| \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}$ conocida como *desigualdad triangular*, y que significa en cierto sentido que "*la distancia más corta entre dos puntos es la línea recta*".

De la desigualdad triangular se deduce esta otra desigualdad también importante:

- $||x| - |y|| \leq |x - y| \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}$

6.– Resolver las siguientes inecuaciones:

a.– $\dfrac{2x-3}{x+2} > 0$

b.– $\dfrac{2x+3}{3x-1} < 2$

c.– $\dfrac{x^2-3x-10}{2x+6} > 0$

d.– $\dfrac{x^2-4x-5}{x^2+2x-3} > 0$

e.– $\dfrac{x^2-8x}{-x^2+5x+6} \leq 0$

f.– $\sqrt{\dfrac{3x-9}{2x+4}} \geq 1$

g.– $\left|34+21x-x^2\right| \leq -1$

h.– $\dfrac{3}{x-9} > \dfrac{2}{x+2}$

i.– $\left|\dfrac{x+2}{2x-3}\right| < 4$

j.– $\left|\dfrac{6-5x}{3+x}\right| \leq \dfrac{1}{2}$

k.– $\left|\dfrac{x^2+3x+4}{x+2}\right| < 2$

l.– $\left|x^2+x-2\right| - |1-x| < 0$

m.– $(1+x)^2 \geq \left|1-x^2\right|$

n.– $\dfrac{|x-1|}{x} \leq 0$

7.– Justificar cuáles de las siguientes igualdades son correctas y cuáles no:

a.– $|-3| = 3$

b.– $|27| = 27$

c.– $\left|a^2\right| = a$

d.– $|-a| = a$

e.– $|a| = a$

g.– $\sqrt{a^2} = a$

h.– $\sqrt{a^2} = |a|$

i.– $\left|a^2\right| = a^2$

j.– $\sqrt[3]{a^3} = a$

k.– $\left|\sqrt{2}+\sqrt{3}-3\right| = \sqrt{2}+\sqrt{3}-3$

8.– Descomponer el polinomio $p(x) = x^4 + x^3 - x^2 + 2x$ en factores irreducibles en $\mathbb{R}$.

9.– Indicar si las siguientes identidades son ciertas. En caso negativo señalar y corregir el error o los errores cometidos:

a.– $\left(2^2 \cdot 2^{-3} \cdot 2^5\right)^2 = \left(2^4\right)^2 = 2^{16}$

b.– $\dfrac{\left(19^2\right)^4}{\left(19^{-3}\right)^2} = \dfrac{19^6}{19^6} = 1$

c.– $\dfrac{5^4 \cdot \left(5^2\right)^6}{\left(5^9\right)^2} = \dfrac{5^4 \cdot 5^{12}}{5^{18}} = 5^{-2} = (-5)^2 = 25$

d.– $(3-7)^0 + 8^0 = 1$

10.– Realiza las siguientes operaciones:

a.– $\dfrac{\left(3\cdot 3^{n+1}+3^{n+2}\right)^3}{\left(3^{n+2}\right)^3}$

b.– $\dfrac{\left(10\cdot 2^{n+1}\right)^3}{\left(2^{n+1}\right)^3}$

c.– $2^{2-n}\cdot\left(2\cdot 2^{n+1}+2^{n+2}\right)$

d.– $\dfrac{\left(1-\frac{3}{2}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}-\frac{3}{4}\right)^2}{\left(\frac{1}{3}-1\right)+\left(\frac{2}{5}-2\right)^2}$

e.– $\dfrac{1-\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}-\left(\frac{3}{4}\right)^{-2}}{\left(\frac{1}{3}-1\right)^2+\frac{2}{3}-2^2}$

f.– $\dfrac{\left[\left(1-\frac{3}{2}\right)^2\right]^{-4}}{\frac{1}{27}}+1$

11.– Racionaliza y simplifica las siguientes expresiones suprimiendo las raíces del denominador:

a.– $\dfrac{4-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

b.– $\dfrac{\sqrt{2}}{6-\sqrt{2}}$

c.– $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{27}}{\sqrt{3}-\sqrt{27}}$

12.– Resuelve las siguientes ecuaciones:

a.– $x^3-9x^2=15-23x$

b.– $\sqrt{2x-5}=1+\sqrt{x-3}$

c.– $2^x+2^{x+1}-24=0$

d.– $x^4-10x^2+9=0$

e.– $\sqrt{-x+2}-1=0.5\sqrt{x+6}$

f.– $2\ln x-\ln(x-16)=2$

13.– Resuelve el siguiente test justificando las respuestas. Sólo una de las 4 respuestas indicadas es la correcta. Marca con una cruz la respuesta que creas correcta.

a.– $\ln 125 =$			
○ $\ln 25\cdot\ln 5$	○ $100\cdot\ln 1.25$	○ $5\cdot\ln 3$	○ Ninguna de las respuestas anteriores es correcta

b.– $\ln\dfrac{a}{b}+\ln\dfrac{b}{c}+\ln\dfrac{c}{d}-\ln\dfrac{ay}{dx}=$			
○ $\ln\dfrac{x}{y}$	○ $\ln\dfrac{a^2y}{d^2x}$	○ 1	○ Ninguna de las respuestas anteriores es correcta

c.– $\left(\log_{10}5\log_{10}100\right)^2=$			
○ $\log_{10}50$	○ 10	○ 1	○ Ninguna de las respuestas anteriores es correcta

d.– La solución de la ecuación logarítmica $\log_2\left(\log_3\left(\log_4 x\right)\right)=0$ es:			
○ 64	○ 0	○ 12	○ Ninguna de las respuestas anteriores es correcta