Teorema de Rouché–Frobenius: Si A es la matriz de coeficientes de un sistema de ecuaciones lineales y AM la matriz ampliada de un sistema de ecuaciones lineales.

- Si $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(AM) =$ número de incógnitas $\implies$ S.C.D. (sistema compatible determinado: una única solución)
- Si $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(AM) <$ número de incógnitas $\implies$ S.C.I. (sistema compatible indeterminado: infinitas soluciones)
- Si $\mathrm{r}(A) < \mathrm{r}(AM) \implies$ S.I. (sistema incompatible: no tiene solución)

Operaciones elementales de fila: Si $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, se llaman operaciones elementales de fila a las siguientes operaciones:

- Intercambiar dos filas $F_i \longleftrightarrow F_j$.
- Multiplicar una fila por un escalar no nulo $\lambda \cdot F_i$, con $\lambda \neq 0$.
- Sumar a una fila otra fila multiplicada por un escalar $F_i + |lambda \cdot F_j$ con $\lambda \in \mathbb{R}$.

Rango de una matriz: El rango de una matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ es el máximo número de filas linealmente independientes que hay en la matriz A.

También es el máximo número de columnas linealmente independientes que hay en la matriz A.

Método de Gauss: Para resolver un sistema de ecuaciones lineales el método más eficaz es en general el método de Gauss que nos permite clasificar, según el teorema de Rouché–Frobenius, y resolver, cuando sea posible, un sistema de ecuaciones lineales.

Mencionar también que otros métodos como el método de Cramer no son en absoluto recomendables y no deberían utilizarse.

El método de Gauss utiliza también la técnica de operaciones elementales de fila.

Para resolver un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas conviene aplicar operaciones elementales de fila sobre la matriz ampliada del sistema hasta conseguir una matriz escalonada. El sistema cuya matriz ampliada es la escalonada es equivalente al sistema inicial. Este método es conocido como *método de Gauss*.

Las entradas principales correspondientes a la matriz escalonada equivalente a la matriz de coeficientes del sistema nos proporcionan lo que en un sistema compatible indeterminado se denominan *incógnitas principales*. El resto de las incógnitas se suele denominar *incógnitas libres*.

1.– Utilizar el método de Gauss para clasificar y resolver –cuando sea posible– los siguientes sistemas:

$$\left.\begin{array}{rcl} 2x-5y+3z &=& 4 \\ x-2y+z &=& 3 \\ 5x+y+7z &=& 11 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{rcl} x-3y+7z &=& 10 \\ 5x-y+z &=& 8 \\ x+4y-10z &=& -11 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{rcl} x-3y-2z &=& 7 \\ 2x-y+15z &=& 3 \\ x-8y-21z &=& 11 \end{array}\right\}$$

<u>*Solución*</u> Escribimos la matriz ampliada del sistema y vamos realizando operaciones elementales de fila sobre la matriz ampliada hasta conseguir una matriz *escalonada* equivalente a la matriz ampliada del sistema. de este modo llegamos a un sistema “escalonado” equivalente al inicial y de clasificación y resolución (si es compatible) inmediatas.

$$AM = \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -5 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & 7 & 11 \end{array}\right) \overset{F_1\leftrightarrow F_2}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & -5 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 7 & 11 \end{array}\right) \overset{\substack{F_2-2F_1\\F_3-5F_1}}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 11 & 2 & -4 \end{array}\right) \overset{\substack{F_3-F_2\\F_4-F_2}}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 13 & -26 \end{array}\right) = BM$$

El sistema de ecuaciones cuya matriz ampliada es BM es equivalente al sistema que tenemos que clasificar y resolver si es posible. La clasificación de este sistema, según el teorema de Rouché–Frobenius resulta trivial así como su resolución (pues se trata de un sistema compatible). En concreto, tenemos:

$$\mathrm{r}\,(A) = \mathrm{r}\,(AM) = 3 = \text{número de incógnitas} \quad \Longrightarrow \quad \text{S.C.D.}$$

$$\left.\begin{array}{rcl} x-2y+z &=& 3 \\ -y+z &=& -2 \\ 13z &=& -26 \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad x=5, y=0, z=-2$$

Para clasificar un sistema de ecuaciones lineales que dependa de uno o más parámetros, podemos:

1. Si una de las dos matrices

   A : matriz de coeficientes del sistema

   AM: matriz ampliada del sistema

   es cuadrada, comenzamos calculando el determinante de la matriz cuadrada[1].

2. Otro método que resulta en general más eficaz, pero que no siempre es conveniente utilizar[2], es el método de Gauss, que nos permite clasificar y resolver un sistema (si éste es compatible), aunque dependa de uno o más parámetros.

2.– Clasificar y resolver cuando sea posible los siguientes sistemas, según los distintos valores de los respectivos parámetros:

$$\left.\begin{array}{rcl} x+y+kz &=& 1 \\ kx+(k-1)y+z &=& k \\ x+y+z &=& k+1 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{rcl} x+y+2z &=& 3 \\ x+2y+3z &=& 5 \\ x+3y+mz &=& 7 \end{array}\right\}$$

Solución Vamos a resolver el primer ejercicio utilizando el primer método mencionado.

En nuestro ejercicio, $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ y $AM \in \mathcal{M}_{3\times 4}(\mathbb{R})$, luego empezamos calculando el determinante de la matriz de coeficientes A:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & k \\ k & k-1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \cdots = k-1$$

[1] Si A es una matriz cuadrada, supongamos $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, entonces $AM \in \mathcal{M}_{n\times n+1}(\mathbb{R})$. Se tiene que:

$$\begin{array}{l} \mathrm{r}(A) \le n \quad ; \quad \mathrm{r}(AM) \le n \\ \mathrm{r}(A) \le \mathrm{r}(AM) \\ \mathrm{r}(A) = n \quad \Longleftrightarrow \quad \det A \neq 0 \end{array}$$

Por lo tanto,

$$\det A \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(AM) = n = \text{nro. de incógnitas} \quad \Longrightarrow \quad \text{S.C.D.}$$

Si la matriz que es cuadrada es AM, digamos $AM \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, entonces $A \in \mathcal{M}_{n\times n-1}(\mathbb{R})$, entonces:

$$\begin{array}{l} \mathrm{r}(A) \le n-1 \quad ; \quad \mathrm{r}(AM) \le n \\ \mathrm{r}(A) \le \mathrm{r}(AM) \\ \mathrm{r}(AM) = n \quad \Longleftrightarrow \quad \det AM \neq 0 \end{array}$$

Por lo tanto:

$$\det AM \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{r}(A) < \mathrm{r}(AM) = n \quad \Longrightarrow \quad \text{S.I.}$$

[2] La razón por la que no es siempre conveniente utilizar el método de Gauss para clasificar un S.E.L. que dependa de parámetros, es que no siempre es conveniente aplicar operaciones elementales de fila a una matriz cuyos elementos dependen de parámetros.

$$\left.\begin{array}{rcl} A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}) & \Longrightarrow & \mathrm{r}(A) \le 3 \\ AM \in \mathcal{M}_{3\times 4}(\mathbb{R}) & \Longrightarrow & \left\{\begin{array}{l} \bullet \quad \mathrm{r}(A) \le 3 \\ \bullet \quad \mathrm{r}(A) = 3 \text{ sii } \det A \neq 0 \end{array}\right. \\ A \text{ submatriz de } AM & \Longrightarrow & \mathrm{r}(A) \le \mathrm{r}(AM) \end{array}\right\} \quad (*)$$

Como sabemos que $\det A = k - 1$ y teniendo en cuenta $(*)$, comenzamos a clasificar el sistema. Nos surgen dos casos:

Caso 1.– $\underline{k \neq 1}$

Caso 2.– $\underline{k = 1}$

Conviene comenzar la clasificación por el caso 1. Tenemos:

Caso 1.– $k \neq 1 \quad \Longrightarrow \quad \det A \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{r}\,(A) = \mathrm{r}\,(AM) = 3 = \text{n.i.} \quad \Longrightarrow \quad$ S.C.D.

Caso 2.– $k = 1 \quad \Longrightarrow \quad \det A = 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{r}\,(A) < 3$, pero el rango de la matriz AM puede ser 3. Para calcular el rango de la matriz ampliada AM escribimos AM para $k = 1$ y utilizamos operaciones elementales de fila para escalonar AM y calcular su rango.

$$AM = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \overset{\substack{F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{r}\,(AM) = 3$$

Por lo tanto:

Caso 2.– $k = 1 \quad \Longrightarrow \quad \det A = 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{r}\,(A) < 3 = \mathrm{r}\,(AM) \quad \Longrightarrow \quad$ S.I.

Como tenemos que resolver el sistema para el caso $k \neq 1$ debemos utilizar el método de Gauss. Por lo tanto hubiera resultado conveniente clasificar el sistema utilizando también el método de Gauss.

$$AM = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 1 \\ k & k-1 & 1 & k \\ 1 & 1 & 1 & k+1 \end{array}\right) \overset{\substack{F_2 - kF_1 \\ F_3 - F_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 1 \\ 0 & -1 & 1-k^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1-k & k \end{array}\right)$$

De aquí deducimos:

- $k \neq 1 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{r}\,(A) = \mathrm{r}\,(AM) = 3 = \text{n.i.} \quad \Longrightarrow \quad$ S.C.D.
$$\left.\begin{array}{rcl} x + y + kz & = & 1 \\ -y + (1-k^2)z & = & 0 \\ (1-k)z & = & k \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad z = \frac{k}{1-k} \quad ; \quad y = (1+k)k \quad ; \quad x = \frac{k^3 - k^2 - 2k + 1}{1-k}$$
- $k = 1 \quad \Longrightarrow \quad \det A = 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{r}\,(A) = 2 < 3 = \mathrm{r}\,(AM) \quad \Longrightarrow \quad$ S.I.

3.– Clasifica y resuelve, cuando sea posible, los siguientes sistemas, utilizando el método de Gauss:

$$\left.\begin{array}{rcl} x + y + z + t & = & 1 \\ x - y + z - t & = & 0 \\ x + y - z - t & = & -1 \\ x + y + z - t & = & 2 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{rcl} 2x + y + 3z & = & 0 \\ 4x + 2y - z & = & 0 \\ 6x + 3y + 2z & = & 0 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{rcl} x - y + 3z - 14t & = & 0 \\ 2x - 2y + 3z + t & = & 0 \\ 3x - 3y + 5z + 6t & = & 0 \end{array}\right\}$$

4.– Resuelve el sistema matricial siguiente:

$$A + B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$2A - 2B = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Cálculo de determinantes: Para calcular un determinante de orden 3 podemos utilizar la regla de Sarrus:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{21}a_{12}a_{33}$$

En general es mejor utilizar propiedades de los determinantes para calcular determinantes de matrices cuadradas de orden 3. Algunas propiedades importantes son:

1. El intercambio de dos filas (o columnas) de una matriz cuadrada cambia de signo su determinante.
2. Si una fila (o columna) es multiplicada por un escalar, el determinante de la matriz cuadrada queda multiplicado por dicho escalar.
3. Si a una fila (o columna) se le añade otra fila (o columna) multiplicada por un escalar cualquiera, no cambia el valor del determinante.

Además utilizaremos la definición recursiva de un determinante de orden $n > 1$.

Si $n > 1$, fijada la fila i de una matriz cuadrada A de orden n, se tiene:

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} \det A_{ik}$$

donde A_{ik} es la matriz cuadrada de orden $n-1$ que resulta de suprimir en la matriz A la fila i y la columna k.

También podemos desarrollar por columnas: Si $n > 1$, fijada la columna j de una matriz cuadrada A de orden n, se tiene:

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{j+k} a_{kj} \det A_{kj}$$

La idea es utilizar fundamentalmente la tercera propiedad antes mencionada para conseguir una fila o una columna donde todos los elementos menos uno sean igual a cero, para después desarrollar por dicha fila o columna.

Calcular el valor del siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & 3 \end{vmatrix}$$

Podemos utilizar directamente la regla de Sarrus, pero en general es más conveniente realizar previamente operaciones elementales de fila y/o columna. Es conveniente indicar que operaciones de fila y/o columna estamos realizando:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & 3 \end{vmatrix} \overset{\substack{C_1-2C_2 \\ C_3-3C_2 \\ \downarrow}}{=} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -7 \\ -1 & 3 & -6 \end{vmatrix} \overset{\substack{\text{desarrollo } F_1 \\ \downarrow}}{=} - \begin{vmatrix} 1 & -7 \\ -1 & -6 \end{vmatrix} = 13$$

De este modo nos hemos evitado la utilización de la regla de Sarrus y hemos simplificado las operaciones.

5.– Calcula el valor de los siguientes determinantes:

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 1 & 7 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad ; \quad \begin{vmatrix} 7 & -4 & 3 \\ 0 & 11 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} \quad ; \quad \begin{vmatrix} 1 & 8 & 1 \\ 1 & 7 & 0 \\ 1 & 6 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & -6 \\ 2 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & -5 \end{vmatrix} \quad ; \quad \begin{vmatrix} 7 & 8 & 0 \\ 0 & -7 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad ; \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

Matriz regular: Una matriz cuadrada se dice *regular* o *inversible* si su determinante es no nulo.

Matriz singular: Una matriz cuadrada se dice *singular* o *no inversible* si su determinante es cero.

La inversa A^{-1} de una matriz A cuadrada regular de orden n es la única matriz que verifica:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$$

La técnica más eficaz para calcular la inversa de una matriz regular consiste en utilizar también operaciones elementales de fila.

Escribimos la matriz A regular y la "ampliamos" con la matriz unidad I_n del mismo orden que A. Realizamos operaciones elementales de fila sobre la matriz $n \times 2n$ con el objetivo de transformar A en la matriz I_n del modo siguiente:

1. Conseguimos ceros debajo de la diagonal principal de la matriz $n \times n$ de la izquierda.
2. Conseguimos unos en la diagonal principal de la matriz $n \times n$ de la izquierda.
3. Sin deshacer lo conseguido: conseguimos ceros encima de la diagonal principal de la matriz $n \times n$ de la izquierda.

$$(A|\, I_n) = \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\substack{F_2-F_1 \\ F_3-F_1}}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{F_3 \leftrightarrow F_2}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \overset{F_1+(F_2+F_3)}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) = (I_n|\, A^{-1})$$

6.– Comprueba que las siguientes matrices son regulares y calcula la matriz inversa de cada una de ellas.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

7.– Calcula la matriz X tal que

$$A \cdot B + C \cdot X = D,$$

siendo

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \; ; \; B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \; ; \; C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \; ; \; D = \begin{pmatrix} -9 & 3 \\ -8 & 17 \end{pmatrix}$$

8.– Sean $A \in \mathcal{M}_{2\times1}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{1\times3}(\mathbb{R})$ y $C \in \mathcal{M}_{3\times1}(\mathbb{R})$. Indicar cuáles de los siguientes productos son posibles, así como el orden de la matriz resultante:

$$A \cdot (B \cdot C) \quad ; \quad A \cdot C \cdot B \quad ; \quad B \cdot C \cdot A \quad ; \quad B^T \cdot C^T \cdot A \quad ; \quad (B \cdot C)^T \cdot A^T$$

9.– Dadas la matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \quad ; \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Calcular A^2, $A \cdot B$, $-3A + 8C$ y $A + C \cdot (C - A)$.

10.– Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & b \\ 0 & 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & b & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & b \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Se sabe que las dos tienen su determinante igual a 1. ¿Hay datos suficientes para calcular los valores de a y b? En caso afirmativo hallar dichos valores, en caso negativo razonar el motivo.