Idea intuitiva de límite: Sea $c \in \mathbb{R}$ y una función f definida cerca de c aunque no necesariamente en el mismo c. El número L es el límite de f cuando x se aproxima a c, y se escribe

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

si y sólo si los valores de la función $f(x)$ se aproximan (tienden) a L cuando x se aproxima a c.

Dado el punto c, y según la anterior "definición", existen dos formas de aproximar x a c: desde valores $x > c$ (por la derecha) y desde valores $x < c$ (por la izquierda). En cada caso se obtienen valores denominados límite por la derecha ($x \to c^+$) y límite por la izquierda ($x \to c^-$). Por definición, para que exista el límite de una función ha de cumplirse que existan los dos límites laterales (por la derecha y por la izquierda) y que ambos sean iguales.

Consideremos, por ejemplo la función

$$\frac{x^2-1}{x-1}$$

que no está definida en el punto $x = 1$. Vamos a estudiar su comportamiento en los alrededores del punto $x = 1$:

x se acerca a 1 por la izquierda $\longrightarrow$ $\longleftarrow$ x se acerca a 1 por la derecha

x	0.5	0.75	0.9	0.99	0.999	**1**	1.001	1.01	1.1	1.25	1.5
f(x)	1.5	1.75	1.9	1.99	1.999	**?**	2.001	2.01	2.1	2.25	2.5

$f(x)$ se acerca a 2 $\longrightarrow$ $\longleftarrow$ $f(x)$ se acerca a 2

La utilización de este tipo de tablas o el uso de la calculadora nos permite intuir en algunos casos sencillos el valor del límite de una función en un punto c. Evidentemente habrá que utilizar otro tipo de técnicas para el cálculo de límites.

En principio, tanto c como L son números reales, pero también podemos considerar la posibilidad de que L sea $+\infty$ o $-\infty$, en cuyo caso diremos que estamos ante un límite infinito. Si c es $+\infty$ o $-\infty$ hablaremos de límites en el infinito.

- El límite por la izquierda de una función $y = f(x)$, cuando x tiende a c, es el valor al que tiende la función para puntos muy próximos a c pero menores que c, escribimos:

$$\lim_{x \to c^-} f(x)$$

- El límite por la derecha de una función $y = f(x)$, cuando x tiende a c, es el valor al que tiende la función para puntos muy próximos a c pero mayores que c, escribimos:

$$\lim_{x \to c^+} f(x)$$

Obviamente, cuando los límites laterales no coinciden, no existe el límite de la función en ese punto.

Ejemplo.– Sea

$$f(x) = \frac{|x|}{x}$$

Calcular, si es que existe, $\lim_{x \to 0} f(x)$.

Teniendo en cuenta la definición de la función valor absoluto:

$$|x| = \begin{cases} -x & x \leq 0 \\ x & x > 0 \end{cases}$$

Observamos que la función $f(x)$ se comporta de manera distinta a la derecha y a la izquierda de cero, luego es conveniente calcular los límites laterales:

- $\displaystyle \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} = -1$

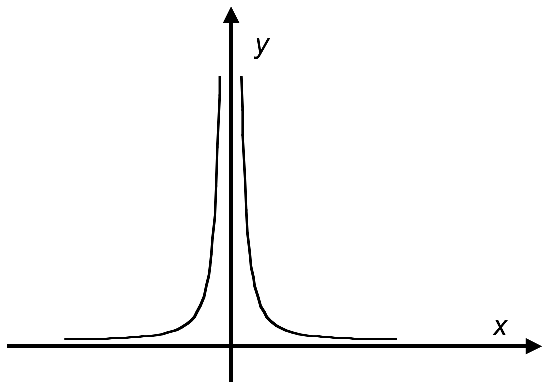
- $\displaystyle \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = 1$

Por lo tanto:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim_{x\to 0^+} f(x) \quad \Longrightarrow \quad \nexists \lim_{x\to 0} f(x)$$

Cuando una función $f(x)$ toma valores cada vez más grandes (o más pequeños) a medida que nos vamos acercando cada vez más a un punto c, diremos que $f(x)$ tiende a $+\infty$ (o $-\infty$) en el punto c

Consideremos ahora la función $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$. ¿Qué podemos decir de $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2}$?



$\boxed{x \text{ se acerca a 0 por la izquierda}} \quad \longrightarrow \quad \longleftarrow \quad \boxed{x \text{ se acerca a 0 por la derecha}}$

x	-0.5	-0.25	-0.1	-0.01	-0.001	**0**	0.001	0.01	0.1	0.25	0.5
f(x)	4	16	100	10000	1000000	**?**	1000000	10000	100	16	4

$\boxed{f(x) \text{ crece sin tope}} \quad \longrightarrow \quad \longleftarrow \quad \boxed{f(x) \text{ crece sin tope}}$

En este caso escribiremos:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

El efecto gráfico de un límite infinito en un punto $c \in \mathbb{R}$ se indica con la presencia de una asíntota vertical. Repasaremos este concepto en otra sección de este capítulo, donde también se recordara el concepto de asíntota horizontal y asíntota oblicua y se indicará como calcular las asíntotas de una función, si es que existen.

Al estudiar el comportamiento de una función $f(x)$ cuando los valores de x se hacen tan grandes (o tan pequeños) como queramos, lo expresamos diciendo que x tiende a + infinito $x \to +\infty$ (o − infinito $x \to -\infty$).

Si una función $f(x)$ cumple que

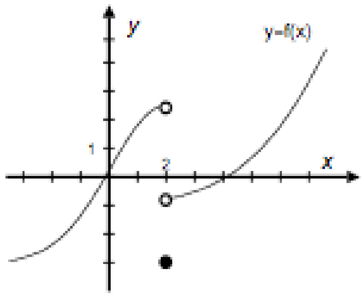
$$\lim_{x\to +\infty} f(x) \in \mathbb{R} \qquad \text{o} \qquad \lim_{x\to -\infty} f(x) \in \mathbb{R}$$

nos encontramos con que la función $f(x)$ presenta una asíntota horizontal ($y = c$).

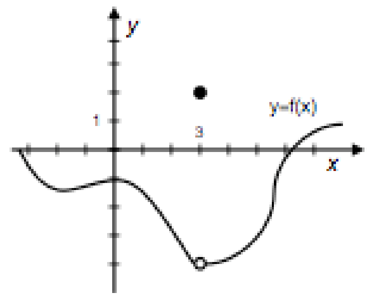
1.– En los ejercicios siguientes se consideran un número c y la gráfica de una función f. Utilizar la gráfica de f para hallar.

$$\text{a.– } \lim_{x\to c^-} f(x) \qquad \text{b.– } \lim_{x\to c^+} f(x) \qquad \text{c.– } \lim_{x\to c} f(x) \qquad \text{d.– } f(c)$$

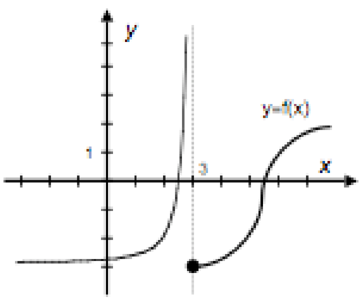
1. $c = 2$



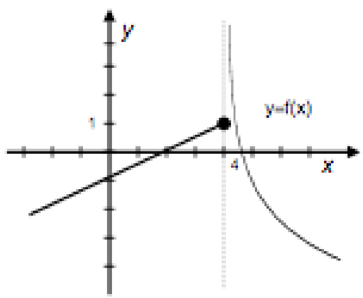
2. $c = 3$



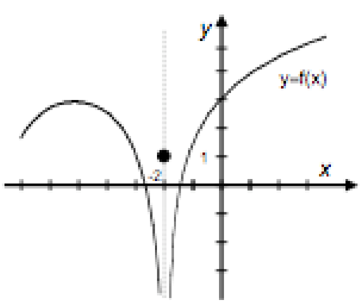
3. $c = 3$



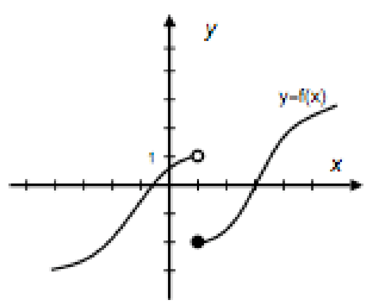
4. $c = 4$



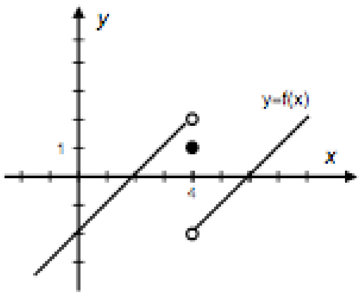
5. $c = -2$



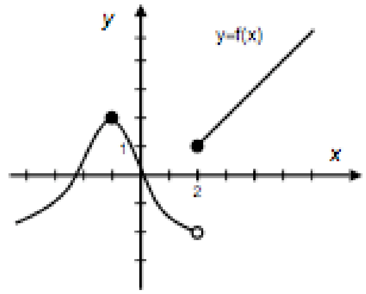
6. $c = 1$



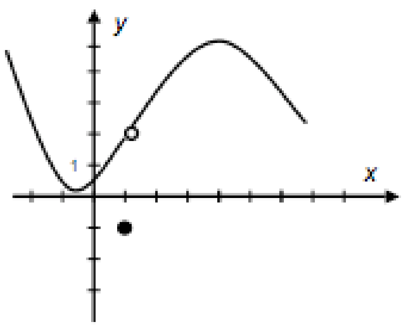
7. $c = 4$



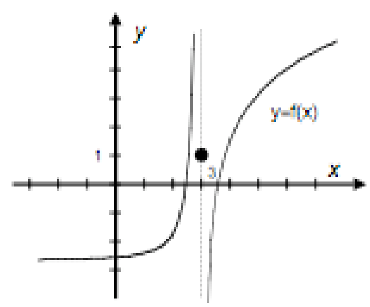
8. $c = 2$



9. $c = 1$



10. $c = 3$



Cálculo de límites: Para calcular el límite de una función suelen aplicarse las propiedades generales de los límites.

Dadas dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ que tienen límite en un punto a, se cumplen las siguientes propiedades:

- $\lim\limits_{x\to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x)$ siempre que no aparezca la indeterminación $\infty - \infty$.
- $\lim\limits_{x\to a} [\lambda \cdot f(x)] = \lambda \cdot \lim\limits_{x\to a} f(x)$ con $\lambda \neq 0$.
- $\lim\limits_{x\to a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x)$ siempre y cuando no aparezcan indeterminaciones del tipo $0 \cdot \infty$.
- $\lim\limits_{x\to a} [f(x)/g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) / \lim\limits_{x\to a} g(x)$ siempre y cuando no aparezcan las indeterminaciones $\dfrac{0}{0}$ o $\dfrac{\infty}{\infty}$.
- $\lim\limits_{x\to a} (f(x))^k = \left(\lim\limits_{x\to a} f(x)\right)^k$ siempre y cuando tengan sentido las potencias que aparecen.
- $\lim\limits_{x\to a} (f(x))^{g(x)} = \left(\lim\limits_{x\to a} f(x)\right)^{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$ siempre y cuando tengan sentido las potencias que aparecen y no nos encontremos con indeterminaciones de los tipos ∞^0, 0^0 o 1^∞.

Sin embargo, en ocasiones no es posible recurrir simplemente a tales propiedades, por cuanto aparecen indeterminaciones que es preciso resolver. Se dice que hay una indeterminación cuando el límite de la función no se obtiene directamente de los límites de las funciones que la componen.

En algunos casos, simplificando las expresiones u obteniendo expresiones equivalentes a las iniciales, se puede resolver la indeterminación y calcular el límite. En otros casos, se requerirá el uso de otras herramientas más potentes.

- ∞/∞: si se trata de funciones polinómicas, se divide el numerador y el denominador por el término de mayor grado. Si las funciones presentan radicales, se multiplican el denominador y el numerador por el conjugado de la expresión que contiene el radical.
- $\infty - \infty$: si se trata de una diferencia de funciones, se realiza la operación de manera que se obtenga una expresión como cociente de funciones, para después calcular el límite. Si aparecen radicales, se multiplica y se divide por la expresión conjugada de la que contiene el radical.
- $0/0$: si se trata de funciones polinómicas, se factorizan el numerador y el denominador y se simplifican los polinomios iguales resultantes. En funciones con radicales, se multiplican el numerador y el denominador por la expresión conjugada de la que contiene el radical.
- $0 \cdot \infty$: si $f(x)$ tiende a 0, y $g(x)$ tiende a infinito, la expresión $f(x) \cdot g(x)$ se puede sustituir por $f(x)/(1/g(x))$, que es del tipo $0/0$. También podemos sustituir $f(x) \cdot g(x)$ por $g(x)/(1/f(x))$ que es una indeterminación del tipo infinito entre infinito.
- 1^∞: se puede utilizar la siguiente fórmula:

  $$\lim f(x)^{g(x)} = e^{\lim g(x)\cdot[f(x)-1]}$$

  o tomar logaritmos y obtenemos una indeterminación del tipo $0 \cdot \infty$.

  También podemos calcular el límite transformando la expresión en una potencia del número e, teniendo en cuenta que:

  $$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

  Si $f(x)$ tiende a 1 cuando x tiende a c (real o infinito) y $g(x)$ tiende a infinito cuando x tiende a c, entonces:

  $$\begin{aligned}\lim_{x\to c} f(x)^{g(x)} &= \lim_{x\to c}\Big(1+f(x)-1\Big)^{g(x)} = \lim_{x\to c}\left[1+\frac{1}{1/f(x)-1}\right]^{\frac{1}{f(x)-1}\cdot[f(x)-1]g(x)} = \\ &= \lim_{x\to c} f(x)^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x\to c} g(x)\ln f(x)}\end{aligned}$$

- ∞^0: se puede utilizar la siguiente fórmula:

  $$\lim_{x\to c} f(x)^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x\to c} g(x)\cdot\ln(f(x))}$$

  y obtenemos una indeterminación del tipo $0 \cdot \infty$.
- 0^0: se puede utilizar la siguiente fórmula:

  $$\lim_{x\to c} f(x)^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x\to c} g(x)\cdot\ln(f(x))}$$

  y obtenemos una indeterminación del tipo $0 \cdot \infty$.

Existen además otras técnicas que conviene dominar pues simplifican notablemente el cálculo de ciertos límites. estas técnicas son:

- Uso de infinitésimos.
  - Decimos que $f(x)$ es un infinitésimo cuando $x \to c$ si se cumple que $\lim\limits_{x\to c} f(x) = 0$.

- ▶ Decimos que $f(x)$ y $g(x)$ son infinitésimos equivalentes cuando $x \to c$ si son infinitésimos cuando $x \to c$ y cumplen que:
$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$
y se escribe $f(x) \sim g(x)$ cuando $x \to c$.
- ▶ Algunos infinitésimos equivalentes:
  - ∘ $\sin x \sim x$ cuando $x \to 0$.
  - ∘ $\tan x \sim x$ cuando $x \to 0$.
  - ∘ $\arcsin x \sim x$ cuando $x \to 0$.
  - ∘ $e^x - 1 \sim x$ cuando $x \to 0$.
  - ∘ $\ln(1+x) \sim x$ cuando $x \to 0$.
  - ∘ $1 - \cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$ cuando $x \to 0$.

▶ Regla de L$'$Hôpital.

2.– Calcular, si es que existen, los siguientes límites:

a.– $\displaystyle\lim_{x\to -3}(|x|-2)$ b.– $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{1}{3x-6}$ c.– $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}$

d.– $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$ e.– $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{\sqrt{x-1}-1}$ f.– $\displaystyle\lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{x-1}}{x}$

g.– $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\frac{x^3-1}{2x^3-1}$ h.– $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\frac{x^3-1}{2x^2-1}$ i.– $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\frac{x^3-1}{2x^4-1}$

3.– Determinar, si existen o no los límites indicados. Calcular los límites que existan:

a.– $\displaystyle\lim_{x\to 2} f(x)$ siendo $f(x) = \begin{cases} 2x-1, & x \le 2 \\ x^2 - x, & x > 2. \end{cases}$

b.– $\displaystyle\lim_{x\to 3} f(x)$ siendo $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-x-6}{\sqrt{x+1}-2}, & x < 3 \\ 7, & x = 3 \\ 2x+3, & x > 3 \end{cases}$

4.– Calcular los límites siguientes:

a.– $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{e^{2x}-e^x}$ b.– $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{e^{2x}-e^x}$ c.– $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{1/x^2}-1}{\ln\frac{x+1}{x}}$

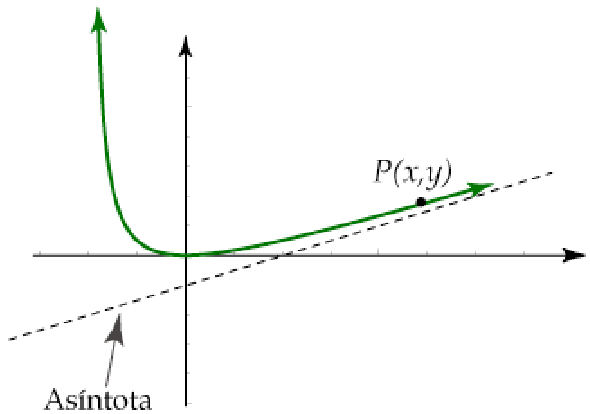
d.– $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\frac{6\cdot 2^x}{2^x-3}$ e.– $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\sqrt[x]{x}$ f.– $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\sin x\cdot\ln\frac{1}{x}$

g.– $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x}{\ln x}\right)^{1/x}$ h.– $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right)$ i.– $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^{x}$

j.– $\displaystyle\lim_{x\to 0} x\cdot\sin\frac{1}{x}$ k.– $\displaystyle\lim_{x\to 0} x^{\sin x}$ l.– $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)^{x^2+1}$

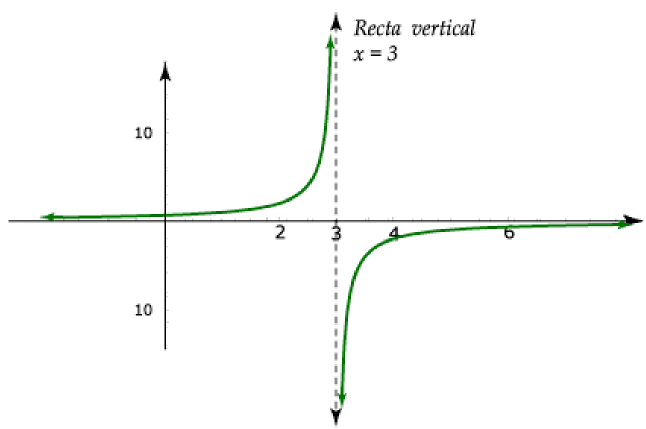
Asíntotas: Cuando el punto $P(x, y)$ de una curva se desplaza a lo largo de ella, de tal forma que su distancia al origen tienda a infinito, puede suceder que la distancia de P a una recta fija, tienda a cero. Esta recta recibe el nombre de *asíntota* de la curva.

Gráficamente:

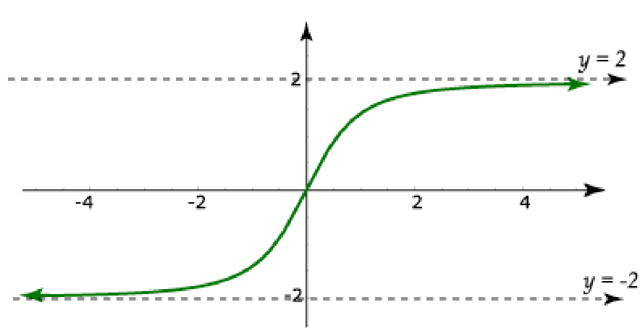


Existen tres tipos de asíntotas.

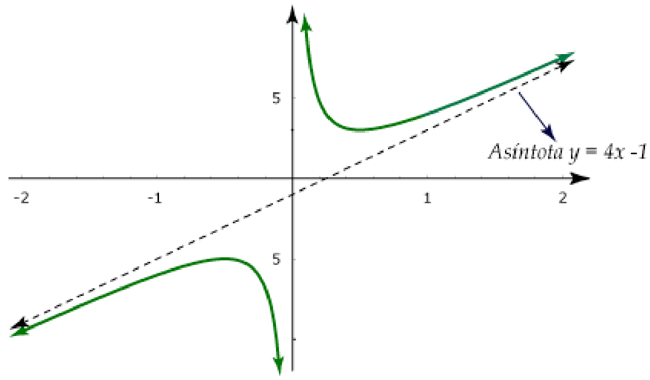
- Se dice que una función $f(x)$ tiene por *asíntota vertical* la recta cuya ecuación es $x = a$ cuando al menos existe uno de los límites laterales de la función en el punto a y dicho límite es $+\infty$ o$-\infty$.



- De igual forma, la función $f(x)$ tiene por *asíntota horizontal* la recta de ecuación $y = b$, cuando existe al menos uno de los límites de la función en el caso de que x tienda a $+\infty$ o$-\infty$ y dicho límite sea b.



► Si los límites: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = m$ y $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) - mx = b$ existen, entonces la recta con ecuación $y = mx + b$ es una *asíntota oblicua*.



5.– Hallar las asíntotas de las siguientes funciones:

a.– $y = \dfrac{1}{x+2}$ b.– $y = 2^x$ c.– $y = \dfrac{-x^2}{x+2}$

d.– $y = \dfrac{x^3}{x^2-1}$ e.– $y = \dfrac{x}{\ln x}$