1.– Derivar las siguientes funciones:

a.– $f(x) = \left(\dfrac{1}{x} - \sin x\right)^3$ $\qquad f'(x) = -\dfrac{3(1+x^2\cos x)(x\sin x - 1)^2}{x^4}$

b.– $f(x) = \left(\ln[(x\cdot\cos x)^4]\right)^7$ $\qquad \dfrac{7\left(\ln(x\cos x)\right)^6 \sec x\,(\cos x - x\sin x)}{x}$

c.– $f(x) = \sqrt{\dfrac{1+\tan x}{\cos(x+7)}}$ $\qquad f'(x) = \dfrac{\sec(x+7)\left(\sec^2 x + ((1+\tan x)\tan(x+7))\right)}{2\sqrt{\sec(x+7)(1+\tan x)}}$

d.– $f(x) = \sqrt[3]{7x+\sqrt{x}}$ $\qquad f'(x) = \dfrac{7+\frac{1}{2\sqrt{x}}}{3\left(\sqrt{x}+7x\right)^{2/3}}$

e.– $f(x) = \sqrt[5]{\cos^4(\tan x)}$ $\qquad f'(x) = -\dfrac{4}{5}\left(\cos^4(\tan x)\right)^{1/5}\sec^2 x\tan(\tan x)$

f.– $f(x) = \ln\left[\left(\dfrac{x^3+3x-1}{x\cdot e^x}\right)^3\right]$ $\qquad f'(x) = \dfrac{-3x^4+6x^3-9x^2+3x+3}{x(x^3+3x-1)}$

g.– $f(x) = 3^x\cdot\arccos\left(\sqrt{1-x^2}\right)$ $\qquad f'(x) = 3^x\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2-x^4}} + \ln 3\cdot\arccos(\sqrt{1-x^2}\right)$

h.– $f(x) = \ln(\arctan x)$ $\qquad f'(x) = \dfrac{1}{\arctan x + x^2\cdot\arctan x}$

2.– Hallar las rectas tangentes a las gráficas de las funciones siguientes en el punto cuya abscisa se indica:

a.– $f(x) = \sqrt{1+x}$ en $x=3$ $\qquad y = \frac{1}{4}x + \frac{5}{4}$

b.– $f(x) = \sin x$ en $x=0$ $\qquad y = x$

c.– $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ en $x=-2$ $\qquad y = -\dfrac{1}{4}e^{-1/4}x + \dfrac{1}{2}e^{-1/4}$

3.– Sea la función real:

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & x \leq 0 \\ x - ax^2 & x > 0 \end{cases}$$

¿Existen valores de $a \in \mathbb{R}$ para los cuáles la función f es derivable en todo $\mathbb{R}$? Justificar la respuesta y en caso afirmativo calcular esos valores.

<u>Solución</u> La función f es derivable en todo $\mathbb{R}$ para todo valor $a \in \mathbb{R}$.

4.– Hallar los puntos críticos y clasificar los valores extremos de la función f definida en $\left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}\right]$ por

$$f(x) = x^2 - 2|x| + 2$$

<u>Solución</u>

Puntos críticos: $\qquad x = -\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}, 0, 1$

Valores extremos: $\quad$ Máximo en $x = 0$, Mínimo en $x = 1$.

5.– Hallar los puntos críticos y clasificar todos los valores extremos de

$$f(x) = \sin x - \sin^2 x, \quad x \in [0, 2\pi]$$

<u>*Solución*</u>

Puntos críticos: $x = 0, 2\pi, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}$

Valores extremos: Máximo en $x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$, Mínimo local en $x = \frac{\pi}{2}$, Mínimo en $x = \frac{3\pi}{2}$.

6.– Encontrar la función cuya segunda derivada es la constante 2, y cuya gráfica presenta un mínimo en el punto $(1, 2)$.

<u>*Solución*</u> $f(x) = x^2 - 2x + 3$.

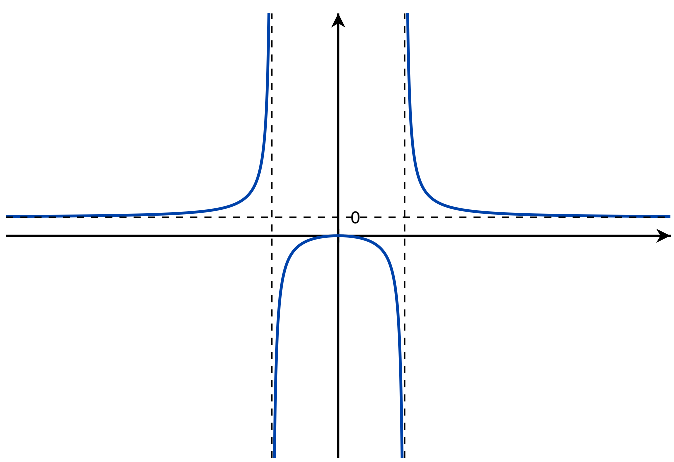
7.– Sea la función

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1}$$

Calcular el dominio de la función, sus asíntotas –si es que existen–, los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función y sus extremos. Con esta información esbozar la gráfica de la función f.

<u>*Solución*</u>

- $\mathrm{Dom}\,(f) = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$.
- Intervalos de crecimiento y decrecimiento. Extremos:
  Creciente en $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$. Decreciente en $(0, 1) \cup (1, +\infty)$. Máximo local en $x = 0$.
- Asíntotas: $x = \pm 1$ son asíntotas verticales. $y = 1$ es asíntota horizontal.



8.– Una ventana de forma rectangular, rematada por un arco de medio punto, tiene un perímetro de 12 metros. ¿Cuáles deben ser sus dimensiones para que sea su superficie lo mayor posible?

<u>*Solución*</u>

$$x = \frac{24}{4 + \pi} \quad ; \quad y = \frac{12}{4 + \pi}$$

9.– La base y la altura de un triángulo isósceles miden, respectivamente, 6 unidades y 12 unidades. Hallar el área máxima posible de un rectángulo que pueda situarse dentro del triángulo con uno de sus lados sobre la base del triángulo. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo o de los rectángulos de máxima área?

Solución Base: 3. Altura: 6. Área=18.

10.– Se planea construir una nueva carretera entre los pueblos A y B. El pueblo A está sobre una carretera abandonada que va de este a oeste. El pueblo B está en un punto situado 3 km hacia el norte de otro punto que está sobre la carretera antigua y a 5 km hacia el este del pueblo A. Los ingenieros proponen conectar los pueblos reconstruyendo una parte de la antigua carretera desde A hasta un punto P y construyendo carretera nueva desde P hasta B. Si el coste de reconstruir carretera antigua es de 200000 euros por km y el de construir nueva es de 400000 euros por km, ¿qué longitud de carretera antigua se deberá reconstruir a fin de minimizar los costes?

Solución $5-\sqrt{3}$ km.

11.– La mancha de impresión de una página ha de ser de 81 centímetros cuadrados. Los márgenes superior e inferior son de 3 centímetros cada uno, mientras que los laterales son de 2 centímetros cada uno. Hallar las dimensiones más económicas dado que el precio de una página es directamente proporcional al perímetro de la misma.

Solución Dimensiones de la página: 15 cm. de alto por 13 cm. de alto.

12.– El beneficio obtenido por la producción y venta de x kilos de un artículo viene dado por la función:

$$B(x) = -0.01x^2 + 3.6x - 180$$

a.– Determinar los kilos que hay que producir para que el beneficio sea máximo.

b.– Determinar los kilos que hay que producir y vender como máximo para que la empresa no tenga pérdidas.

Solución

a.– Hay que producir 180 kilos para que el beneficio sea máximo.

b.– Si pasa de 300 kilos, la empresa tendrá pérdidas.

13.– Enunciar el teorema de Rolle. Dado el intervalo $I = [0, 5]$ y dada la función $f(x) = x^2 - AX$, encontrar el valor de A para que se pueda aplicar el teorema de Rolle al intervalo I, a aplicar el teorema en ese caso.

Solución

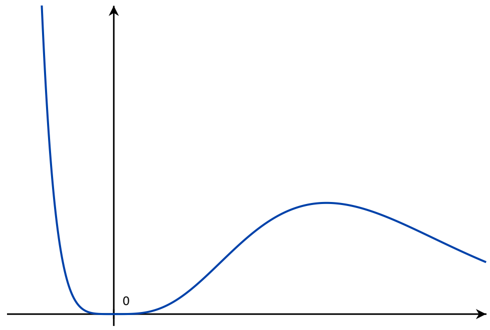
$$f(x) = x^2 - 5x \qquad ; \qquad f'\left(\frac{5}{2}\right) = 0$$

14.– Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función

$$f(x) = x^4 e^{-x}$$

Como consecuencia calcular los máximos y mínimos locales de f y representar su gráfica.

<u>*Solución*</u>



15.– Una hoja de papel debe contener 648 cm^2 de texto impreso, siendo los márgenes superior e inferior de 2 cm (cada uno) y los laterales de 1cm. Hallar las dimensiones que debe tener la hoja para que su superficie sea la mínima posible.

<u>*Solución*</u> Dimensiones de la hoja: 40 cm. de alto por 20 cm. de alto.

16.– Sea $f(x) = x + xe^{-x}$. Calcular la ecuación de la recta tangente a f en el punto x para el cual dicha recta tangente sea paralela a la recta que pasa por los puntos $(1, 1)$ y $(3, 3)$.

<u>*Solución*</u> $y = x + \dfrac{1}{e}$.

17.– Hallar el dominio de definición, los máximos y mínimos y los puntos de inflexión de la función

$$f(x) = x + \sqrt{1 - x}$$

<u>*Solución*</u>

- Dominio: $(-\infty, 1]$.
- Máximo: en $x = 3/4$.

18.– Hallar el dominio de definición, los extremos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$$

<u>*Solución*</u>

- Dominio: $\mathbb{R} - \{0\}$.
- Creciente en $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$. Decreciente en $(-1, 0) \cup (0, 1)$.
- Máximo local en $x = -1$. Mínimo local en $x = 1$.

19.– Sea h una función derivable en todos los puntos, de la que se conocen los siguientes valores: $h(2) = 3$ y $h'(2) = -1$. se considera la función $f(x)$ definida por

$$f(x) = \sqrt{\left[h(x)\right]^2 + x^2 + 3}$$

Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto $x = 2$.

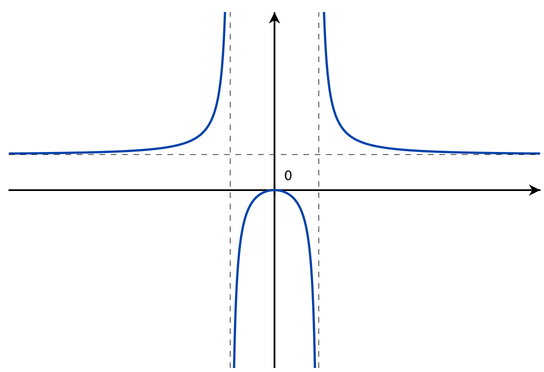
<u>*Solución*</u> $\quad y = -\dfrac{1}{4}x + \dfrac{9}{2}$.

20.– Sea h la función definida por

$$h(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4}$$

Encontrar las asíntotas, los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos de h. Dibujar un esquema de la gráfica de h.

<u>*Solución*</u>

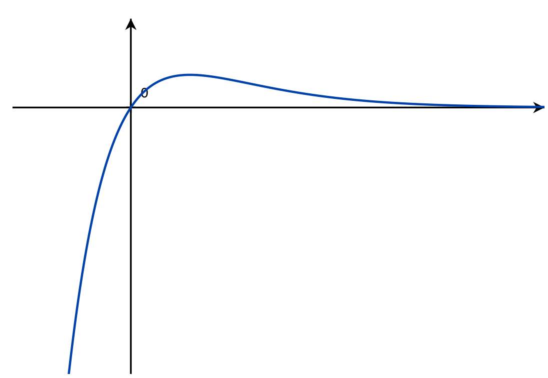


21.– Hallar los máximos y mínimos relativos, los puntos de inflexión y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función

$$y = xe^{-x}$$

<u>*Solución*</u>

- Creciente en $(-\infty, 1)$. Decreciente en $(1, \infty)$.
- Máximo en $x = 1$.
- Punto de inflexión en $x = 2$.



22.– Un trozo de alambre de longitud 20 se divide en dos trozos. Con el primero se forma un rectángulo cuya base es el doble de su altura y con el segundo trozo se forma un cuadrado. Encontrar las longitudes de dichos trozos para que sea mínima la suma del área del rectángulo y la del cuadrado.

Solución Longitud del trozo con el que se forma el rectángulo es $\frac{180}{17}$ y la longitud del trozo con el que se forma el cuadrado es $\frac{160}{17}$.

23.– Encontrar el dominio de la función $y = \ln(1 + x + x^2)$ y los puntos en los que la tangente a la curva es paralela a la bisectriz del primer cuadrante.

Solución

- Dominio: $\mathbb{R}$.
- Puntos en los que la tangente a la curva es paralela a la bisectriz del primer cuadrante son $(0, 0)$ y $(1, \ln 3)$.

24.– Resolver la desigualdad

$$\frac{x+2}{1-x} < 1, \qquad (x \neq 1)$$

Solución $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup (1, \infty)$.

25.– Formar la composición $f \circ g$ y dar el dominio,

a.– $f(x) = 2x + 5, \quad g(x) = x^2 \qquad f(g(x)) = 2x^2 + 5 \qquad \text{Dom}\,(f \circ g) = \mathbb{R}$.

b.– $f(x) = \sqrt{x}, \quad g(x) = x^2 + 5 \qquad f(g(x)) = \sqrt{x^2 + 5} \qquad \text{Dom}\,(f \circ g) = \mathbb{R}$.

c.– $f(x) = \sqrt{x}, \quad g(x) = x^2 \qquad f(g(x)) = |x| \qquad \text{Dom}\,(f \circ g) = \mathbb{R}$.