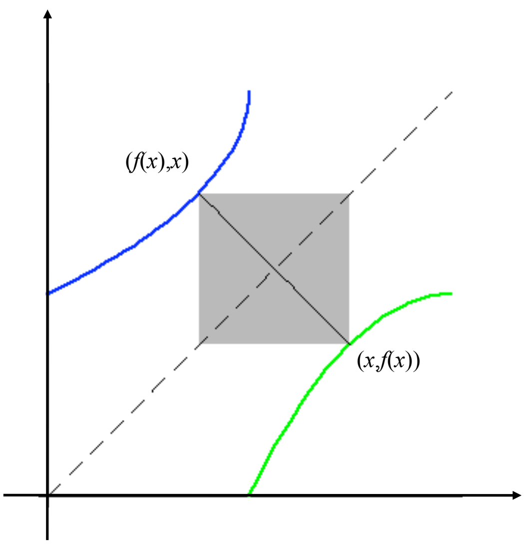
Funciones elementales

En este capítulo repasamos las funciones elementales: polinómicas, exponenciales, logarítmicas, trigonométricas y trigonométricas inversas. Utilizaremos la representación gráfica de estas funciones para recordar los aspectos más relevantes de las mismas: dominio, recorrido, continuidad, diferenciabilidad, asíntotas…

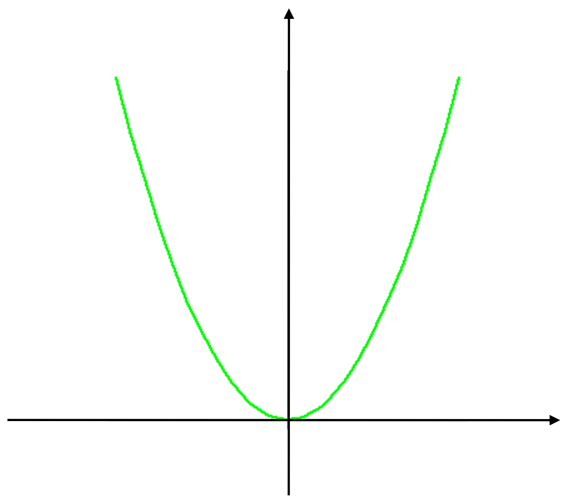
Representación gráfica de la gráfica de la inversa de una función biyectiva

Existe una relación muy interesante entre la gráfica de una función biyectiva y la gráfica de su función inversa (que sabemos existe). Cada gráfica es la imagen especular de la otra: la recta $y = x$ desempeña el papel de espejo.

En lugar de dar una definición formal, vamos a fijarnos en la figura adjunta. Como se sabe, la gráfica de la función f consta de puntos de la forma $(x, f(x))$. Puesto que f^{-1} tiene el valor x en $f(x)$, la gráfica de f^{-1} está constituida por puntos de la forma $(f(x), x)$. Tales puntos, $(x, f(x))$ y $(f(x), x)$ son vértices opuestos del cuadrado sombreado.



$$f(x) = x^{2n}, \quad n \geq 1$$

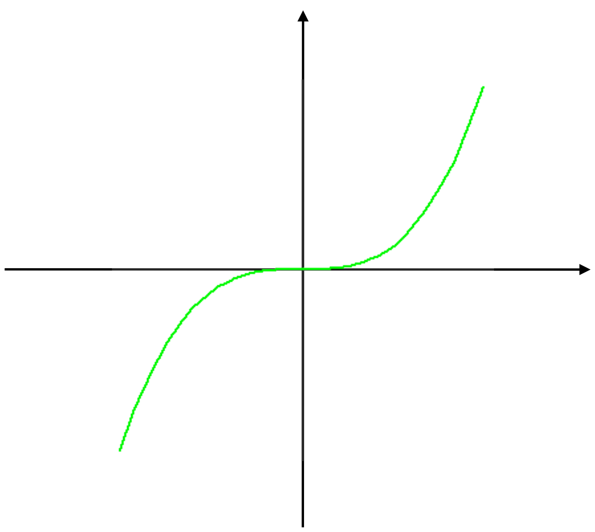


- **Dominio:** $\mathbb{R}$
- **Recorrido:** $[0, +\infty)$
- **Continuidad:** **SÍ**
- **Diferenciabilidad:** **SÍ**
- **Simetría:** **SÍ**

  Respecto del eje vertical:

  $f(x) = f(-x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- **Asíntotas:** **NO**

$$f(x) = x^{2n+1}, \quad n \geq 1$$

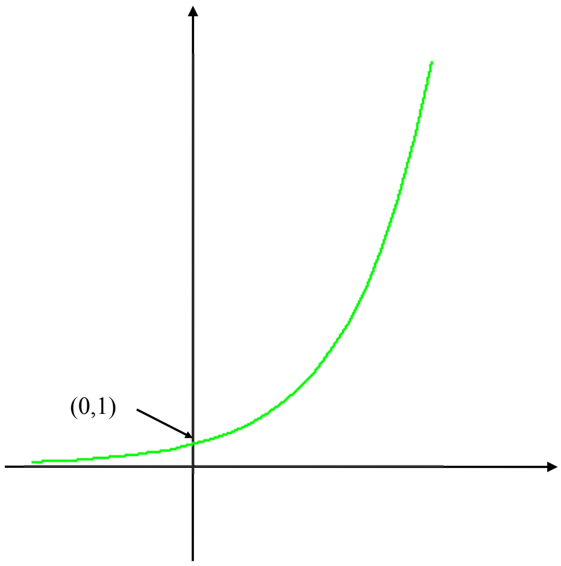


- **Dominio:** $\mathbb{R}$
- **Recorrido:** $\mathbb{R}$
- **Continuidad:** **SÍ**
- **Diferenciabilidad:** **SÍ**
- **Simetría:** **SÍ**

  Respecto del origen de coordenadas:

  $f(x) = -f(-x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- **Asíntotas:** **NO**

$$f(x) = e^x$$



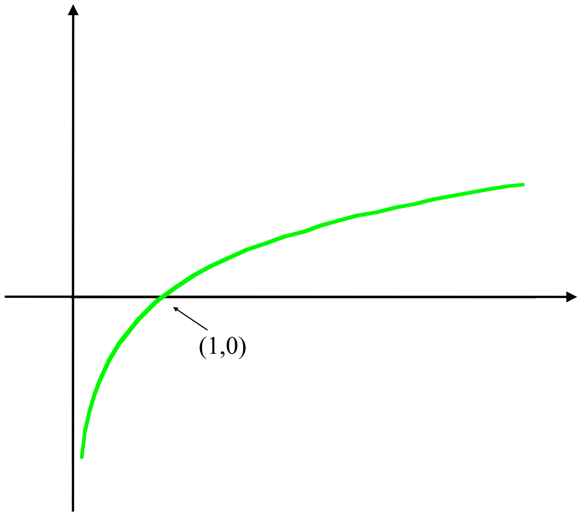
- **Dominio:** $\mathbb{R}$
- **Recorrido:** $(0, +\infty)$
- **Continuidad:** **SÍ**
- **Diferenciabilidad:** **SÍ**
- **Simetría:** **NO**
- **Asíntotas:** **SÍ**

Asíntota horizontal:

$$y = 0$$

5

$$f(x) = \ln x$$



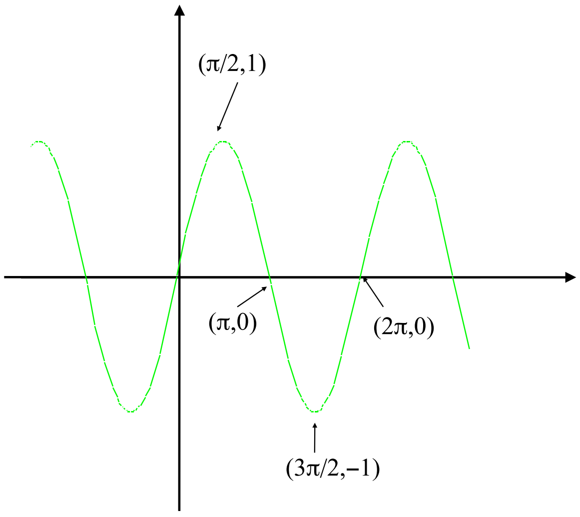
- **Dominio:** $(0, +\infty)$
- **Recorrido:** $\mathbb{R}$
- **Continuidad:** **SÍ**
- **Diferenciabilidad:** **SÍ**
- **Simetría:** **NO**
- **Asíntotas:** **SÍ**

Asíntota vertical:

$$x = 0$$

6

$f(x) = \sin x$



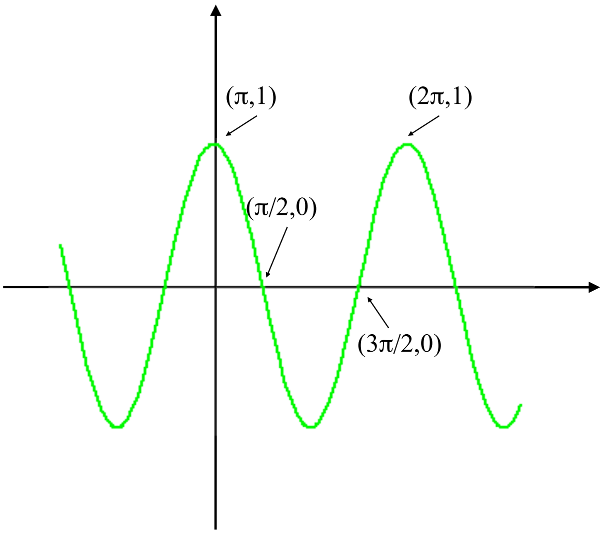
- **Dominio:** $\mathbb{R}$
- **Recorrido:** $[-1, 1]$
- **Continuidad:** **SÍ**
- **Diferenciabilidad:** **SÍ**
- **Simetría:** **SÍ**

  Respecto del origen de coordenadas:

  $f(x) = -f(-x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- **Asíntotas:** **NO**
- **Periodicidad:**

  Periódica de período 2π

$f(x) = \cos x$



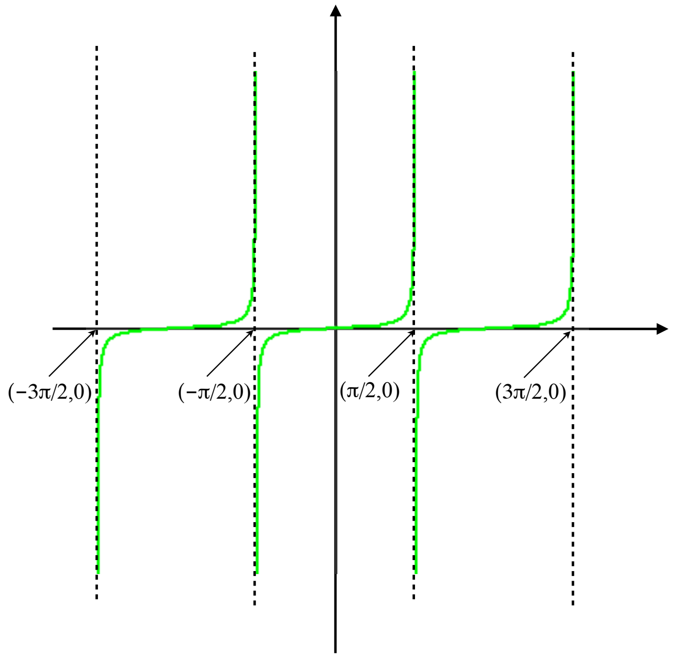
- **Dominio:** $\mathbb{R}$
- **Recorrido:** $[-1, 1]$
- **Continuidad:** **SÍ**
- **Diferenciabilidad:** **SÍ**
- **Simetría:** **SÍ**

  Respecto del eje vertical:

  $f(x) = f(-x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- **Asíntotas:** **NO**
- **Periodicidad:**

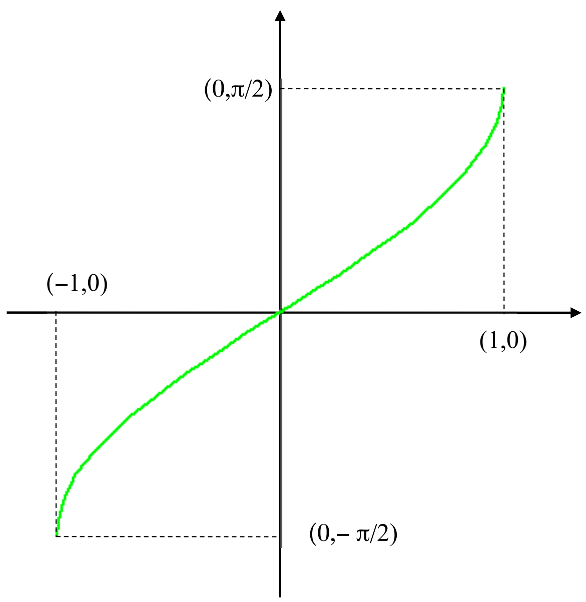
  Periódica de período 2π

$$f(x) = \tan x$$



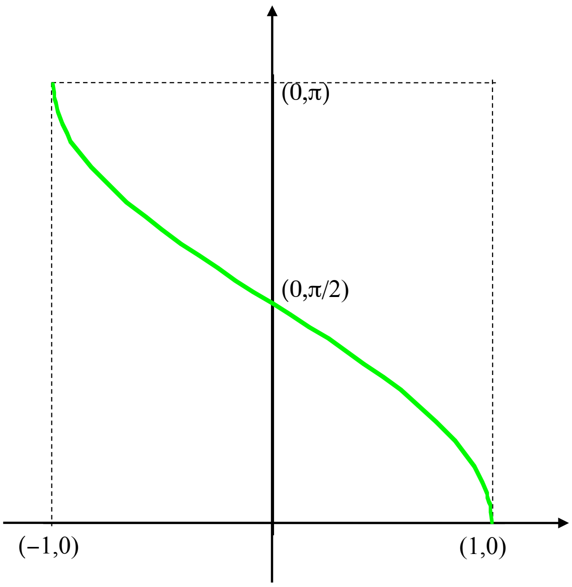
- **Dominio:** $\mathbb{R} - \{\pi/2 + k \cdot \pi / k \in \mathbb{Z}\}$
- **Recorrido:** $\mathbb{R}$
- **Continuidad:**
  Continua en su dominio.
  En los puntos $\{\pi/2 + k \cdot \pi / k \in \mathbb{Z}\}$ **presenta discontinuidades infinitas**
- **Diferenciabilidad:**
  Diferenciable en su dominio
- **Simetría:** **SÍ**
  Respecto del origen de coordenadas:
  $f(x) = -f(-x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- **Asíntotas:** **SÍ**
  Asíntotas verticales:
  $x = \pi/2 + k \cdot \pi \quad k \in \mathbb{Z}$
- **Periodicidad:**
  Periódica de período π

$$f(x) = \arcsin x$$



- **Dominio:** $[-1, 1]$
- **Recorrido:** $[-\pi/2, \pi/2]$
- **Continuidad:** **SÍ**
- **Diferenciabilidad:**
  Diferenciable en $(-1, 1)$
- **Simetría:** **SÍ**
  Respecto del origen de coordenadas:
  $f(x) = -f(-x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- **Asíntotas:** **NO**

$$f(x) = \arccos x$$

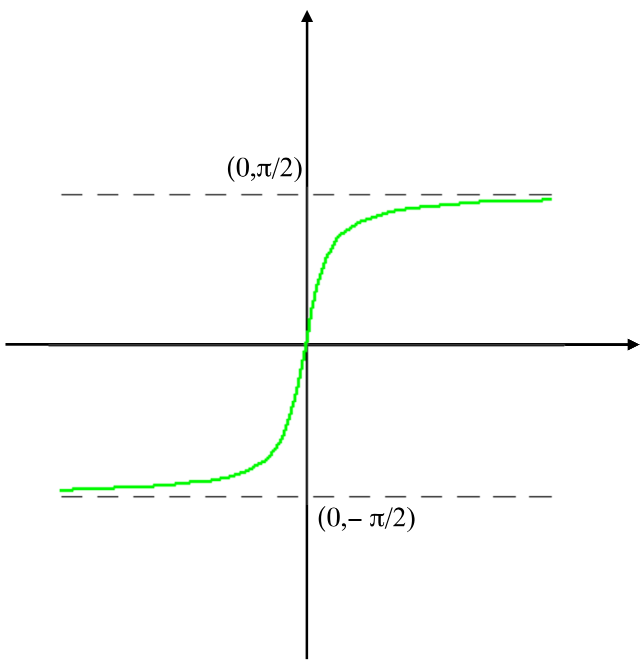


- **Dominio:** $[-1, 1]$
- **Recorrido:** $[0, \pi]$
- **Continuidad:** **SÍ**
- **Diferenciabilidad:**

  Diferenciable en $(-1, 1)$
- **Simetría:** **SÍ**

  Respecto al punto (0,π/2)
- **Asíntotas:** **NO**

$$f(x) = \arctan x$$



- **Dominio:** $\mathbb{R}$
- **Recorrido:** $(-\pi/2, \pi/2)$
- **Continuidad:** **SÍ**
- **Diferenciabilidad:** **SÍ**
- **Simetría:** **SÍ**
- **Asíntotas:** **SÍ**

  Asíntotas horizontales:

  $y = -\pi/2$
  $y = \pi/2$