Matrices y determinantes

En este capítulo introducimos las matrices y las operaciones con matrices, pues constituyen el lenguaje adecuado para abordar muchas cuestiones de naturaleza lineal. Entre estas, la más elemental es la discusión de sistemas de ecuaciones lineales.

Una **matriz** es una disposición rectangular de números entre paréntesis (o corchetes).

$$A = (a_{ij})_{m \times n} = [a_{ij}]_{m \times n}$$

Suma de matrices

$$A + B = (a_{ij})_{m \times n} + (b_{ij})_{m \times n} = (a_{ij} + b_{ij})_{m \times n}$$

Producto de una matriz por un escalar

$$\alpha \cdot A = \alpha \cdot (a_{ij})_{m \times n} = (\alpha \cdot a_{ij})_{m \times n}$$

Traspuesta de una matriz

$$A^T = (a_{ji})_{n \times m}$$

Producto de matrices

Multiplicar la fila i de A por la columna j de B

$$C = A \cdot B \quad ; \qquad c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

Sólo para matrices cuadradas de orden n:

➢ **Si $n = 1$, det A se identifica con el único escalar que contiene la matriz.**

➢ **Si $n > 1$, fijada la fila i:**

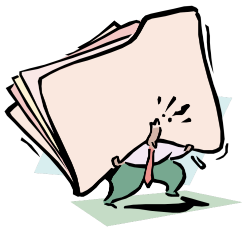
$$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} \det A_{ik}$$

Determinante de una matriz cuadrada de orden dos

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Determinante de una matriz cuadrada de orden tres

Regla de Sarrus



$$\begin{array}{ccc|cc} & & - & - & - \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ & & + & + & + \end{array}$$

Utilizar operaciones elementales de fila o columna **sobre la matriz cuadrada *A* para simplificar el cálculo del determinante de *A*:**

1. **El intercambio de dos filas** (o columnas) **de una matriz cuadrada cambia de signo su determinante.**

2. **Si una fila** (o columna) **de una matriz cuadrada se multiplica por un escalar, el determinante de la matriz cuadrada queda multiplicado por dicho escalar.**

3. **Si a una fila** (o columna) **de una matriz cuadrada se le añade otra fila** (o columna) **multiplicada por un escalar cualquiera, no cambia el valor del determinante.**

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$$

¿Es conmutativo el producto de matrices? **NO**

El producto de matrices no es necesariamente conmutativo.

$$¿A \cdot B = (0) \quad (\text{matriz nula}) \quad \Longrightarrow \quad A = (0) \ \text{ o } \ B = (0)\,?$$

$$¿\det(\alpha \cdot A) = \alpha \cdot \det A?$$

$$A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \quad \Longrightarrow \quad \det(\alpha \cdot A) =$$

$$¿(A+B)^2 = A^2 + 2A \cdot B + B^2?$$

$$(A+B)^2 =$$

MÉTODO DE GAUSS

$$AM \sim \cdots \sim AM^*$$

Operaciones elementales de fila

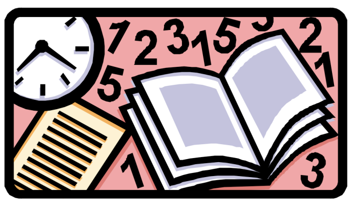
Matriz escalonada

TEOREMA DE ROUCHÉ-FROBENIUS

1. $\mathrm{r}\,(A) = \mathrm{r}\,(AM) = n \quad \Longrightarrow \quad$ S.C.D.

2. $\mathrm{r}\,(A) = \mathrm{r}\,(AM) < n \quad \Longrightarrow \quad$ S.C.I.

3. $\mathrm{r}\,(A) < \mathrm{r}\,(AM) \quad \Longrightarrow \quad$ S.I.

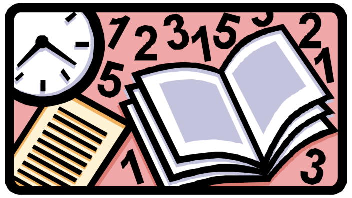


Sólo para matrices cuadradas de orden *n*:

- **Matrices inversibles o matrices regulares si y sólo si su determinante es no nulo.**

- **Matrices no inversibles o matrices singulares si y sólo si su determinante es cero.**

$$(A|\, I_n) \sim \cdots \sim (I_n|\, A^{-1})$$



Operaciones elementales de fila

Potencias naturales de una matriz cuadrada

$$A^p = \underbrace{A \cdot A \cdots A}_{p} \qquad \forall p \in \mathbb{N}$$

$$A^0 = ? \qquad A^{-p} = ? \qquad p \in \mathbb{N}$$