

Matrices y determinantes

En este capítulo introducimos las matrices y las operaciones con matrices, pues constituyen el lenguaje adecuado para abordar muchas cuestiones de naturaleza lineal. Entre estas, la más elemental es la discusión de sistemas de ecuaciones lineales.

1

Una **matriz** es una disposición rectangular de números entre paréntesis (o corchetes).

$$A = (a_{ij})_{m \times n} = [a_{ij}]_{m \times n}$$

Suma de matrices

$$A + B = (a_{ij})_{m \times n} + (b_{ij})_{m \times n} = (a_{ij} + b_{ij})_{m \times n}$$

Producto de una matriz por un escalar

$$\alpha \cdot A = \alpha \cdot (a_{ij})_{m \times n} = (\alpha \cdot a_{ij})_{m \times n}$$

Traspuesta de una matriz

$$A^T = (a_{ji})_{n \times m}$$

Producto de matrices

$$C = A \cdot B \quad ; \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$$

Multiplique la fila i de A por la columna j de B

2

Sólo para matrices cuadradas de orden n :

- Si $n = 1$, $\det A$ se identifica con el único escalar que contiene la matriz.
- Si $n > 1$, fijada la fila i :

$$\det A = \sum_{k=1}^n (-1)^{i+k} a_{ik} \det A_{ik}$$

Determinante de una matriz cuadrada de orden dos

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Determinante de una matriz cuadrada de orden tres

Regla de Sarrus



$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{matrix} a_{11}a_{22}a_{33} & a_{12}a_{23}a_{31} & a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{11}a_{23}a_{32} & -a_{12}a_{21}a_{33} & -a_{13}a_{22}a_{31} \end{matrix}$$

3

Utilizar operaciones elementales de fila o columna sobre la matriz cuadrada A para simplificar el cálculo del determinante de A :



1. El intercambio de dos filas (o columnas) de una matriz cuadrada cambia de signo su determinante.
2. Si una fila (o columna) de una matriz cuadrada se multiplica por un escalar, el determinante de la matriz cuadrada queda multiplicado por dicho escalar.
3. Si a una fila (o columna) de una matriz cuadrada se le añade otra fila (o columna) multiplicada por un escalar cualquiera, no cambia el valor del determinante.

4

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$$

¿Es conmutativo el producto de matrices?

NO

El producto de matrices no es necesariamente conmutativo.

$$¿A \cdot B = (0) \text{ (matriz nula)} \implies A = (0) \text{ o } B = (0)?$$

$$¿\det(\alpha \cdot A) = \alpha \cdot \det A?$$

$$A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R}) \implies \det(\alpha \cdot A) =$$

$$¿(A + B)^2 = A^2 + 2A \cdot B + B^2?$$

$$(A + B)^2 =$$

5

MÉTODO DE GAUSS

$$AM \sim \dots \sim AM^*$$

Operaciones elementales de fila

Matriz escalonada



TEOREMA DE ROUCHÉ-FROBENIUS

$$1. \quad r(A) = r(AM) = n \implies \text{S.C.D.}$$

$$2. \quad r(A) = r(AM) < n \implies \text{S.C.I.}$$

$$3. \quad r(A) < r(AM) \implies \text{S.I.}$$



6

Sólo para matrices cuadradas de orden n :

- **Matrices inversibles o matrices regulares si y sólo si su determinante es no nulo.**
- **Matrices no inversibles o matrices singulares si y sólo si su determinante es cero.**

$$(A | I_n) \sim \dots \sim (I_n | A^{-1})$$

Operaciones elementales de fila



Potencias naturales de una matriz cuadrada

$$A^p = \underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_p \quad \forall p \in \mathbb{N}$$

$$A^0 = ? \quad A^{-p} = ? \quad p \in \mathbb{N}$$