Límites y continuidad

Podríamos empezar diciendo que los límites son importantes en el cálculo, pero afirmar tal cosa sería infravalorar largamente su auténtica importancia. Sin límites el cálculo sencillamente no existiría. Cualquier noción del cálculo es un límite en uno u otro sentido.

¿Qué es la velocidad instantánea? Es el límite de las velocidades medias.

¿Qué es la pendiente de una curva? Es el límite de las pendientes de las rectas secantes.

¿Qué es la longitud de una curva? Es el límite de la longitud de los caminos poligonales.

¿Qué es la suma de una serie infinita? Es el límite de las sumas finitas.

¿Qué es el área de una región limitada por curvas? Es el límite de la suma de las áreas de las regiones delimitadas por segmentos de rectas poligonales.

Idea intuitiva del límite

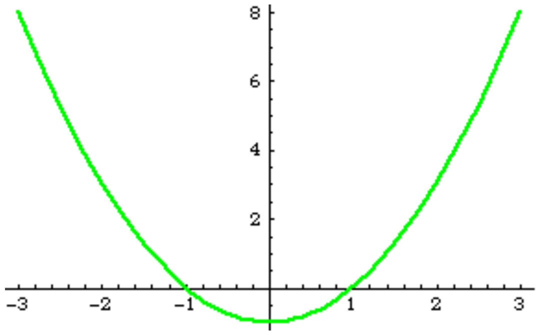
Empezamos con un número c y una función f definida cerca de c aunque no necesariamente en el mismo c. El número L es el límite de f cuando x se aproxima a c, y se escribe

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

si y sólo si los valores de la función $f(x)$ se aproximan (tienden) a L cuando x se aproxima a c.

Consideremos la función: $f(x) = x^2 - 1$

x	$f(x)$
1.9	2.61
1.99	2.9601
1.999	2.996001
1.9999	2.99960001
2.0001	3.00040001
2.001	3.004001
2.01	3.0401
2. 1	3.41



Cuando x se aproxima a 2, tanto por la izquierda como por la derecha, tomando valores menores o mayores que 2, f(x) se aproxima, es decir, tiende cada vez más a 3.

Consideremos la función: $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} \quad x \neq 1$

Esta función no está definida en x=1; sin embargo vamos a estudiar su comportamiento en los alrededores de x=1.

	x se acerca a 1 por la izquierda				$\longrightarrow$	$\longleftarrow$	x se acerca a 1 por la derecha				
x	0.5	0.75	0.9	0.99	0.999	**1**	1.001	1.01	1.1	1.25	1.5
f(x)	1.5	1.75	1.9	1.99	1.999	**?**	2.001	2.01	2.1	2.25	2.5
			$f(x)$ se acerca a 2		$\longrightarrow$	$\longleftarrow$	$f(x)$ se acerca a 2				

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$$

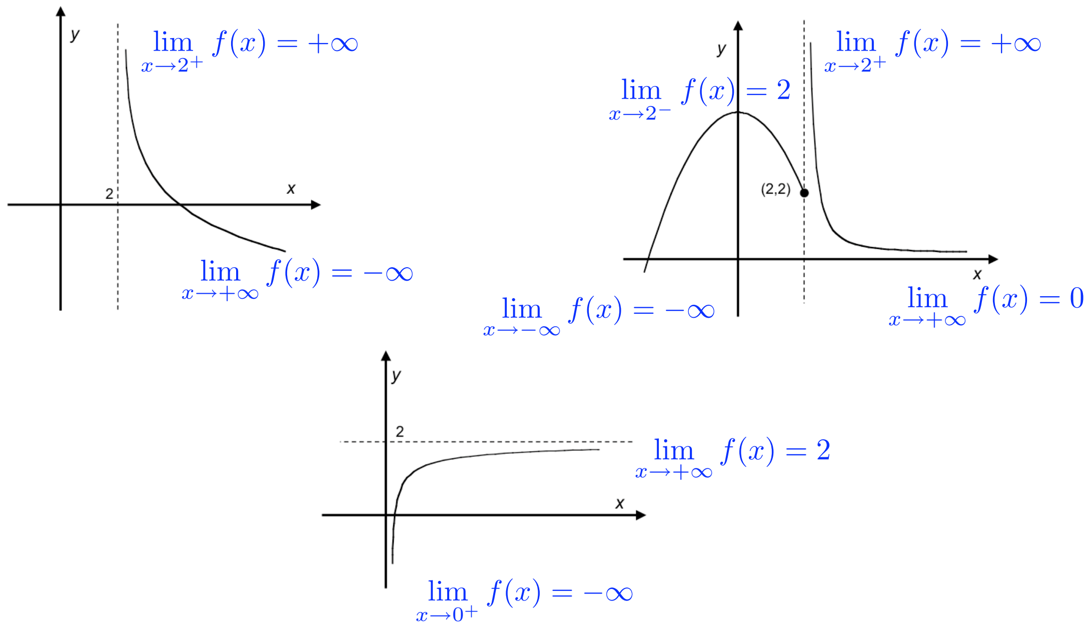
Límites laterales

$\lim_{x \to a^+} f(x) = L \qquad \lim_{x \to a^-} f(x) = L$

También podemos hablar de límites infinitos y límites en el infinito.

Si una función $f(x)$ crece indefinidamente cuando el valor de la variable x tiende a a, se dice que su límite es infinito ($+\infty$, si el crecimiento es en sentido positivo, y $-\infty$, si lo es en sentido negativo).

Análogamente, también es posible definir límites de una función cuando el valor de x tiende a $+\infty$ o a $-\infty$.



Continuidad

En el lenguaje coloquial, decir que algo es "continuo" equivale a decir que transcurre sin interrupción y sin cambios abruptos. En el lenguaje matemático, la palabra "continuo" tiene, en gran parte, el mismo significado.

La idea básica es la siguiente: supongamos dados una función f y un número c. Se calculan (cuando sea posible) los valores:

$$\lim_{x\to c} f(x) \qquad \text{y} \qquad f(c)$$

y se comparan los resultados. La función f es continua en c si y sólo si estos dos valores coinciden:

$$\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$$

OBSERVACIÓN.- Recordar que en la definición de "límite de f en c" no exigimos que f esté definida en el propio c. Por el contrario, la definición de "continuidad en c" requiere que f esté definida en c. Así, de acuerdo con esta definición, una función f es continua en un punto si y sólo si:

- **f está definida en c**
- $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ **existe,**
- $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$

Se dice que una función f es **discontinua en c** si no es continua en ese punto.

Si el dominio de f contiene un intervalo $(c-p\ ,\ c+p)$, $p > 0$ (de manera que f esté definida en c), entonces f sólo puede dejar de ser continua en c por una de las dos razones siguientes:

1. $\nexists \lim\limits_{x \to c} f(x)$

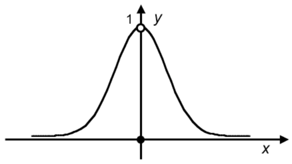
2. $\lim\limits_{x \to c} f(x) \neq f(c)$

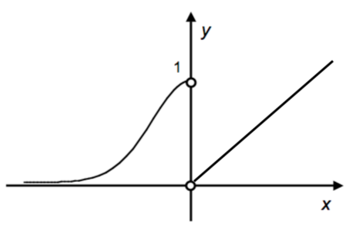
Discontinuidad de salto

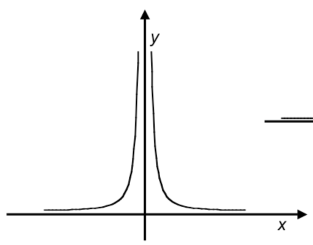
Discontinuidad infinita

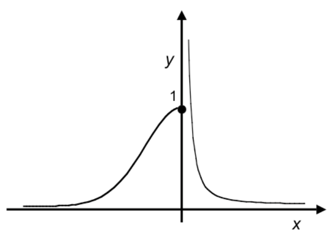
....

Discontinuidad evitable









Indeterminaciones

En el cálculo de límites, se dice que hay una indeterminación cuando el límite de la función no se obtiene directamente de los límites de las funciones que la componen.

Las indeterminaciones son:

$$\frac{\infty}{\infty} \qquad \frac{0}{0} \qquad 0\cdot\infty \qquad \infty-\infty$$

$$1^{\infty} \qquad \infty^{0} \qquad 0^{0}$$

En algunos casos, simplificando las expresiones u obteniendo expresiones equivalentes a las iniciales, se puede resolver la indeterminación y calcular el límite. En otros casos, se requerirá el uso de otras herramientas más potentes.

Cálculo de límites

Para calcular el límite de una función suelen aplicarse las propiedades generales de los límites. Sin embargo, a veces aparecen indeterminaciones que es preciso resolver.

Infinito entre infinito: si se trata de funciones polinómicas, se divide el numerador y el denominador por el término de mayor grado. Si las funciones presentan radicales, se multiplican el denominador y el numerador por el conjugado de la expresión que contiene el radical.

Cero entre cero: si se trata de funciones polinómicas, se factorizan el numerador y el denominador y se simplifican los polinomios iguales resultantes. En funciones con radicales, se multiplican el numerador y el denominador por la expresión conjugada de la que contiene el radical.

Cero por infinito: si $f(x)$ tiende a 0, y $g(x)$ tiende a infinito, la expresión $f(x)\cdot g(x)$ se puede sustituir por $f(x)/(1/g(x))$, que es del tipo $0/0$. También podemos sustituir $f(x)\cdot g(x)$ por $g(x)/(1/f(x))$ que es una indeterminación del tipo infinito entre infinito.

Infinito menos infinito: si se trata de una diferencia de funciones, se realiza la operación de manera que se obtenga una expresión como cociente de funciones, para después calcular el límite. Si aparecen radicales, se multiplica y se divide por la expresión conjugada de la que contiene el radical.

Cálculo de límites

Uno elevado a infinito: se resuelve transformando la expresión en una potencia del número e, teniendo en cuenta que:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$$

Si $f(x)$ tiende a 1 cuando x tiende a c (real o infinito) y $g(x)$ tiende a infinito cuando x tiende a c, entonces:

$$\lim_{x\to c} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to c}\Big(1+f(x)-1\Big)^{g(x)} = \lim_{x\to c}\left[1+\frac{1}{1/\left(f(x)-1\right)}\right]^{\frac{1}{f(x)-1}\cdot[f(x)-1]g(x)} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to c}[f(x)-1]g(x)}$$

Infinito elevado a cero: teniendo en cuenta que el logaritmo de un límite es el límite del logaritmo,

$$\lim_{x\to c} f(x)^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x\to c} g(x)\ln f(x)}$$

Cero elevado a cero: teniendo en cuenta que el logaritmo de un límite es el límite del logaritmo,

$$\lim_{x\to c} f(x)^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x\to c} g(x)\ln f(x)}$$

Infinitésimos

Se llama **infinitésimo** a toda función cuyo límite en un punto dado es cero. El concepto de infinitésimo, entendido intuitivamente como algo de módulo infinitamente pequeño, es de gran utilidad en el cálculo de límites.

Infinitésimos equivalentes: si $u(x)$ es un infinitésimo cuando x tiende a c, entonces:

$$\sin u(x) \approx u(x) \qquad \arcsin u(x) \approx u(x)$$

$$\tan u(x) \approx u(x) \qquad \arctan u(x) \approx u(x)$$

$$1-\cos u(x) \approx \frac{(u(x))^2}{2} \qquad e^{u(x)}-1 \approx u(x)$$

$$\ln\Big(1+u(x)\Big) \approx u(x)$$

Importante: El producto de un infinitésimo por una función acotada es también un infinitésimo.